

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Р. М. Минькова

Функции комплексного переменного и операционное исчисление

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата и специалитета
по направлениям подготовки*
140800.62 – Ядерные физика и технологии;
141401.65 – Ядерные реакторы и материалы;
141405.65 – Технологии разделения изотопов и ядерное топливо;
140801.65 – Электроника и автоматика физических установок;
010900.62 – Прикладные математика и физика;
210100.62 – Электроника и нанoeлектроника;
201000.62 – Биотехнические системы и технологии;
200100.62 – Приборостроение;
221700.62 – Стандартизация и метрология;
230100.62 – Информатика и вычислительная техника;
230400.62 – Информационные системы и технологии

Екатеринбург
УрФУ
2021

УДК 517.2: 517.3
ББК 22.161.1
М 62

Рецензенты:

кафедра прикладной математики Уральского государственного экономического университета
(зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук Ю.Б. Мельников);
старший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН,
проф., д-р физ.-мат. наук Е.Ф. Леликова;

Научный редактор – доц., канд. физ.-мат. наук Н.В. Чуксина

Минькова Р.М.

М 62 Функции комплексного переменного и операционное исчисление:

учебное пособие / Р.М. Минькова. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2021. 72 с.

ISBN 978-5-321-01701-2

Рассмотрены функции комплексного переменного и операционное исчисление в объеме, необходимом при изучении специальных курсов. Изложение теоретического материала сопровождается решением примеров.

Учебное пособие предназначено для студентов физических и информационных специальностей физико-технического факультета.

Библиогр.: 10 назв. Рис.44.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные
методы и уравнения математической физики»
при поддержке физико-технического факультета.

УДК 517.2: 517.3
ББК 22.161.1

ISBN 978-5-321-01701-2

© УГТУ – УПИ, 2021

© Минькова Р.М., 2021

1. Комплексные числа

Кратко напомним понятие комплексных чисел и действий с ними, которые рассматривались ранее.

1.1. Определение, изображение, формы записи

К понятию комплексного числа привело стремление решить уравнение $x^2 + 1 = 0$ и извлечь корень из отрицательного числа.

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y — действительные числа, i — так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$.

Числа x, y называются соответственно действительной и мнимой частью комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым, если $y = 0$, то $x + i \cdot 0 = x$ есть действительное число.

Два комплексных числа считаются равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части, т.е.

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся знаком мнимой части, называются комплексно-сопряженными.

Комплексное число $z = x + iy$ изображают точкой M плоскости с координатами x, y или ее радиус-вектором \overrightarrow{OM} (рис. 1). Длина вектора \overrightarrow{OM} называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r :

$$|z| = r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

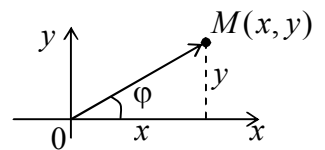


Рис. 1

Угол φ между радиус-вектором \overrightarrow{OM} и положительным направлением оси ox называют аргументом комплексного числа z . Угол φ определяется неоднозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); договоримся брать то значение φ , которое заключено между $-\pi$ и π , обозначать его $\arg z$ и называть главным значением аргумента.

Наряду с **алгебраической формой** $z = x + iy$ комплексного числа рассмотрим еще две формы записи.

Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (рис. 1), то комплексное число $z = x + iy$ можно записать в **тригонометрической форме**: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Введя функцию $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, комплексное число можно записать в **показательной форме**: $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Итак, имеем три формы записи комплексного числа

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Пример 1.1. Записать комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Чтобы записать z в тригонометрической форме, найдем его модуль и аргумент: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, а для правильного отыскания аргумента ре-

комендуем изобразить число z на плоскости (рис. 2). Найдем сначала острый угол φ_1 , дополнительный к углу φ : $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{1}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$. Тогда $\varphi = -\pi + \varphi_1 = -\frac{2\pi}{3}$; тригонометрическая и показательная формы записи числа $z = -1 - i\sqrt{3}$ будут следующие:

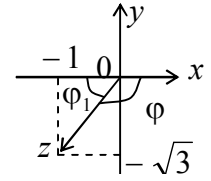


Рис. 2

$$z = 2 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2 e^{-\frac{2\pi}{3} i}.$$

1.2. Основные действия с комплексными числами

Операции сложения, вычитания, умножения комплексных чисел определяются следующим естественным образом.

1). При сложении (вычитании) двух комплексных чисел складываются (соответственно вычитаются) их действительные и мнимые части, т.е.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2). \quad (1.1)$$

С геометрической точки зрения сложение (вычитание) комплексных чисел равносильно сложению (вычитанию) изображающих их векторов (рис.3). Отметим, что расстояние между комплексными точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$. Поэтому окружность с центром в точке z_0 радиуса R имеет уравнение $|z - z_0| = R$.

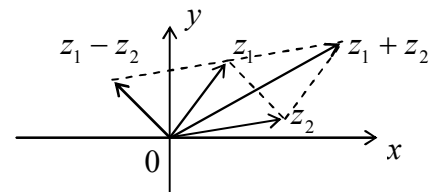


Рис. 3

2). Умножение двух комплексных чисел в алгебраической форме определяется по правилам умножения двучленов с учетом равенства $i^2 = -1$, т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.2)$$

При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули умножаются, а аргументы складываются; действительно:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (1.3)$$

В показательной форме

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i \varphi_1} \cdot r_2 e^{i \varphi_2} = r_1 r_2 e^{i (\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

3). Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, т.е. $z = \frac{z_1}{z_2}$, если $z \cdot z_2 = z_1$. Практически при делении двух комплексных чисел в алгебраической форме нужно числитель и знаменатель дроби

$\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) умножить на число, сопряженное знаменателю; тогда делителем будет действительное число и

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.4)$$

Например, $\frac{2+5i}{7+3i} = \frac{(2+5i) \cdot (7-3i)}{(7+3i) \cdot (7-3i)} = \frac{14-15i^2+35i-6i}{49-9i^2} = \frac{29+29i}{49+9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

При делении двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах их модули делятся, а аргументы вычитаются, т.е.

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg z = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (1.5)$$

Действительно, если $\frac{z_1}{z_2} = z$, то $z_1 = z \cdot z_2$. Тогда $|z_1| = |z| \cdot |z_2|$, $\arg z_1 = \arg z + \arg z_2$.

Отсюда $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg z = \arg z_1 - \arg z_2$.

В показательной форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

4). Возведение в степень комплексного числа в алгебраической форме осуществляется по правилам возведения в степень двучлена с учетом того, что $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ и т.д. Например, используя формулу для куба разности, получим: $(2-i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$.

При возведении комплексного числа z в большую степень удобно использовать его тригонометрическую форму $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Учитывая, что при умножении модули умножаются, а аргументы складываются, получим формулу Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}. \quad (1.6)$$

Пример 1.2. Вычислить z^6 , если $z = \sqrt{3} + i$.

Решение. Изобразим комплексное число z на плоскости (рис. 4), найдем его модуль и аргумент:

$$|z| = r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

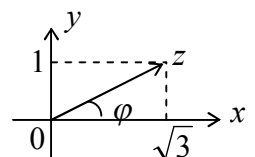


Рис. 4

Тогда $z^6 = r^6 (\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi) = -64$.

5). Извлечение корня n -й степени из комплексного числа определяется как действие, обратное возведению в степень, т.е. $\sqrt[n]{z} = w$, если $w^n = z$.

При извлечении корня из комплексного числа z удобно использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Так как $w^n = z$, то

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π , то есть

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2\pi k \quad \text{или} \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Подставляя эти значения в выражение $\sqrt[n]{z} = w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, получим

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.7)$$

Придавая k значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений корня n -й степени из комплексного числа. При других значениях k получим значения корня, совпадающие с уже найденными. Например, при $k = n$ и при $k = 0$ значения корней совпадают:

$$w_n = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi n}{n} \right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) = w_0.$$

Аналогично, $w_{n+1} = w_1$, $w_{n+2} = w_2, \dots$. Итак, для любого $z \neq 0$

корень степени n из числа z имеет n различных значений.

Пример 1.3. Решить уравнение $z^3 + 1 = 0$.

Решение. Из уравнения имеем $z = \sqrt[3]{-1}$. Найдем модуль и аргумент числа -1 : $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$. Тогда корни уравнения имеют вид:

$$z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3}.$$

Придавая k значения $0, 1, 2$, получим три корня уравнения:

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_1 &= \cos \pi + i \sin \pi = -1, \\ z_2 &= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

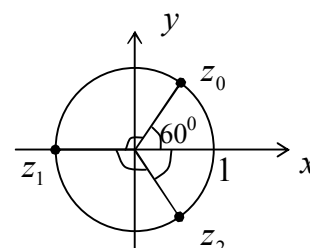


Рис. 5

Эти корни лежат на единичной окружности и делят ее на три равные части (рис. 5).

Если нужно извлечь корень квадратный, то можно и не пользоваться формулой (1.7). Например,

$$\sqrt{12i - 5} = \sqrt{12i - 9 + 4} = \sqrt{12i + (3i)^2 + 2^2} = \sqrt{(2 + 3i)^2} = \pm(2 + 3i).$$

Если вы не догадались о таком способе, то можно обозначить $\sqrt{12i - 5} = x + iy$ и возвести это равенство в квадрат: $12i - 5 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$.

Приравнявая действительные и мнимые части, получим:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2xy = 12, \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{6^2}{x^2} = -5 \Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$$

Действительные корни получившегося биквадратного уравнения $x = \pm 2$. Тогда $y = \pm 3$ и $z = x + iy = \pm(2 + 3i)$.

2. Функции комплексного переменного

Если каждому комплексному числу z из множества D соответствует комплексное число w из множества E , то w является функцией переменной z : $w = f(z)$. При этом D есть область ее определения, а E – множество ее значений.

Мы будем рассматривать как однозначные, так и многозначные функции, т.е. каждому значению аргумента соответствует одно или много значений функции.

Например, функция $w = \frac{3z-i}{z^2+1}$ определена при $z \neq \pm i$ и является однозначной функцией; функция $w = \sqrt[5]{z}$ является пятизначной функцией; функция $w = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) является многозначной функцией.

В дальнейшем нам нужно будет выделять у функции ее действительную и мнимую части. Как это делается, рассмотрим на примере функции $w = z^2$. Так как $z = x + iy$, то $w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Таким образом, функция $w = z^2$ представлена в виде $w = u(x, y) + i v(x, y)$, где $u(x, y) = x^2 - y^2$ – ее действительная часть, а $v(x, y) = 2xy$ – ее мнимая часть.

Аналогичным образом любую функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y); \\ u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z). \end{aligned}$$

2.1. Элементарные функции

Функции e^z , $\sin z$, $\cos z$

Известно, что функции e^z , $\sin z$, $\cos z$ для любого действительного z представимы в виде суммы следующих рядов:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (2.1)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (2.2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (2.3)$$

Нетрудно показать, пользуясь признаком Даламбера, что эти ряды сходятся и для любого комплексного числа z . Поэтому формулы (2.1), (2.2), (2.3) естественно взять за определения функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ для любого комплексного числа z . Заметим, что функции $\sin z$, $\cos z$ нельзя определять, как в тригонометрии, т.к. угол z не может быть комплексным. Поэтому и пришлось прибегнуть к помощи рядов.

Так как ряд для $\sin z$ содержит только нечетные степени z , то $\sin(-z) = -\sin z$, т.е. функция $\sin z$ – нечетная. Ряд для $\cos z$ содержит только четные степени z , поэтому $\cos(-z) = \cos z$ и функция $\cos z$ – четная.

Связь между функциями e^z , $\sin z$, $\cos z$

I). Запишем функцию e^{iz} :

$$e^{iz} = 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots$$

Сгруппируем слагаемые, стоящие на нечетных местах, и отдельно слагаемые, стоящие на четных местах, и учтем, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ...:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right).$$

Сумма первого ряда равна $\cos z$, сумма второго ряда равна $\sin z$. Поэтому

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (2.4)$$

2). Заменяя в формуле (2.4) z на $-z$ и используя четность функции $\cos z$ и нечетность функции $\sin z$, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (2.5)$$

Складывая и вычитая формулы (2.4) и (2.5), получим: $e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$, $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$, или

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2.6)$$

Формулы (2.4), (2.6) устанавливают связь между функциями e^z , $\sin z$, $\cos z$ и называются **формулами Эйлера**.

Свойства функций e^z , $\sin z$, $\cos z$

1). $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Действительно, используя определение функции e^z , получим

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \frac{z_1^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \frac{z_2^4}{4!} + \dots\right) = \\ &= 1 + \frac{z_1 + z_2}{1!} + \frac{z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2}{2!} + \frac{z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3}{3!} + \dots = \\ &= 1 + \frac{z_1 + z_2}{1!} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1 + z_2)^3}{3!} + \dots = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

2). Функция e^z имеет период $T = 2\pi i$.

Действительно, используя предыдущее свойство, а затем формулу (2.4), получим

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

3). Функции $\sin z$, $\cos z$ имеют период $T = 2\pi$.

Действительно, используя формулу (2.6) и периодичность функции e^z , получим

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Аналогично проверяется периодичность функции $\sin z$.

4). а) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

б) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$, г) $\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z$,

в) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$, д) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$.

Для проверки первых трех формул нужно записать $\sin z$, $\cos z$ по формулам Эйлера (2.6). Следующие две формулы получаются из предыдущих при $z_1 = z_2$.

5). Функции $\sin z$, $\cos z$ — не ограничены на комплексной плоскости.

Например, $\cos(in) = \frac{e^{i(in)} + e^{-i(in)}}{2} = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Обратим внимание, что свойства 1), 3), 4) функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ такие же, как для соответствующих функций действительной переменной. Свойства же 2) и 5) имеют место только для функций комплексной переменной.

Перечисленные свойства используются при вычислении значений функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ и при решении уравнений, содержащих эти функции.

Пример 2.1. Вычислить $e^{3+\pi i}$.

Решение. По свойству 1) и формуле (2.1): $e^{3+\pi i} = e^3 \cdot e^{\pi i} = e^3 (\cos \pi + i \sin \pi) = -e^3$.

Гиперболические функции

Для комплексного аргумента гиперболические синус и косинус вводятся так же, как для действительного аргумента, т.е.

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (2.7)$$

Перечислим свойства функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

1). Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ имеют период $2\pi i$ (так же, как функция e^z).

2). Для комплексного аргумента существует следующая связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\begin{aligned} \cos(iz) &= \operatorname{ch} z, & \sin(iz) &= i \operatorname{sh} z, \\ \operatorname{ch}(iz) &= \cos z, & \operatorname{sh}(iz) &= i \sin z. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Проверим одну из этих формул: $\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$.

3). Для комплексного аргумента (как и для действительного):

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z.$$

Пример 2.2. Вычислить: а) $\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} i$, б) $\operatorname{ch} \pi i$, в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right)$.

Решение. а) $\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} i = i \sin \frac{\pi}{2} = i$; б) $\operatorname{ch} \pi i = \cos \pi = -1$;

$$\begin{aligned} \text{в) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cos(i \ln 2) - \sin \frac{\pi}{2} \sin(i \ln 2) = -\sin(i \ln 2) = -i \operatorname{sh}(\ln 2) = \\ &= -i \cdot \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = -i \frac{2 - (2)^{-1}}{2} = -\frac{3i}{4}. \end{aligned}$$

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция вводится как обратная к показательной, т.е.

$$w = \operatorname{Ln} z, \text{ если } z = e^w.$$

Пусть $w = u + iv$. Так как $z = e^w$, то $z = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}$; отсюда $z = e^u (\cos v + i \sin v)$.

Мы получили тригонометрическую форму записи числа z , где e^u – его модуль, а v – его аргумент, или отличается от аргумента на $2\pi k$. Таким образом, $e^u = |z|$ или $u = \ln |z|$; $v = \arg z + 2\pi k$. Поэтому для вычисления $\operatorname{Ln} z = u + iv$ получаем следующую формулу:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.9)$$

Значение этой многозначной функции при $k = 0$ называют главным значением логарифма и обозначают $\ln z$.

На функцию $\operatorname{Ln} z$ распространяется ряд свойств логарифма действительного переменного:

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) &= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, & 2) \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2, \\ 3) \operatorname{Ln}(z_1^{z_2}) &= z_2 \cdot \operatorname{Ln} z_1, & 4) e^{\operatorname{Ln} z} &= z. \end{aligned}$$

Докажем, например, первое свойство:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) &= \ln |z_1 \cdot z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \\ &= (\ln |z_1| + i \operatorname{Arg} z_1) + (\ln |z_2| + i \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2. \end{aligned}$$

Пример 2.3. Вычислить $\ln(-1 - i\sqrt{3})$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 - i\sqrt{3}$ (см. пример 1.1):

$$|z| = 2, \quad \arg z = -\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда по формуле (2.9) имеем:

$$\ln(-1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$$

Обобщенные степенная и показательная функции

Степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$w = z^a = e^{\operatorname{Ln} z^a} = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Показательная функция $w = a^z$ с произвольным комплексным основанием $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$w = a^z = e^{\operatorname{Ln} a^z} = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Пример 2.4. $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln 1 + i(\pi/2 + 2\pi k))} = e^{-(\pi/2 + 2\pi k)}.$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

По определению

$$\begin{aligned} w &= \operatorname{Arcsin} z, \text{ если } \sin w = z; & w &= \operatorname{Arc} \cos z, \text{ если } \cos w = z; \\ w &= \operatorname{Arctg} z, \text{ если } \operatorname{tg} w = z; & w &= \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z, \text{ если } \operatorname{ctg} w = z; \\ w &= \operatorname{Arsh} z, \text{ если } \operatorname{sh} w = z; & w &= \operatorname{Arc} \operatorname{ch} z, \text{ если } \operatorname{ch} w = z; \\ w &= \operatorname{Arth} z, \text{ если } \operatorname{th} w = z; & w &= \operatorname{Arc} \operatorname{cth} z, \text{ если } \operatorname{cth} w = z. \end{aligned}$$

Пример 2.5. Вычислить $w = \operatorname{Arcch} i$.

Решение. Из условия $w = \operatorname{Arcch} i$ имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} w = i &\Rightarrow \frac{e^w + e^{-w}}{2} = i \Rightarrow e^{2w} - 2ie^w + 1 = 0 \Rightarrow e^w = i \pm \sqrt{i^2 - 1} = i(1 \pm \sqrt{2}) \Rightarrow \\ w_1 &= \operatorname{Ln}[(1 + \sqrt{2})i] = \ln(1 + \sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \\ w_2 &= \operatorname{Ln}[(1 - \sqrt{2})i] = \ln(\sqrt{2} - 1) + i\left(\frac{-\pi}{2} + 2\pi k\right). \end{aligned}$$

2.2. Предел и непрерывность функции

Определение предела функции комплексного переменного совпадает с аналогичным определением для функции действительного переменного. Для формулировки определения введем на комплексной плоскости понятие окрестности конечной точки (рис.6) и окрестности бесконечности (рис.7).

ε – окрестность конечной точки $S_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$;

ε – окрестность бесконечности $S_\varepsilon(\infty) = \{z : |z| > \varepsilon\}$;

выколотая ε – окрестность конечной точки $\overset{\circ}{S}_\varepsilon(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$;

выколотая ε – окрестность бесконечности $\overset{\circ}{S}_\varepsilon(\infty) = S_\varepsilon(\infty) = \{z : |z| > \varepsilon\}$.

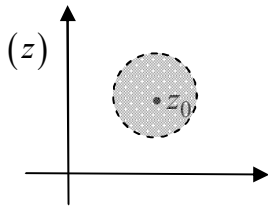


Рис.6

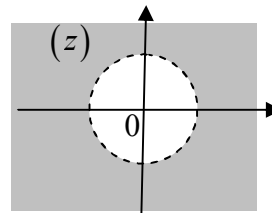


Рис.7

Определение (на языке окрестностей). Комплексное число A называют пределом функции $f(z)$ при $z \rightarrow a$ (A, a – конечные или бесконечные), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ , что

$$f(z) \in S_\varepsilon(A) \text{ как только } z \in \overset{\circ}{S}_\delta(z_0).$$

Определение (на языке неравенств). Рассмотрим несколько случаев.

1). $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ (a, A – конечные), если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что

$$|f(z) - A| < \varepsilon \text{ как только } 0 < |z - a| < \delta.$$

2). $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ (a – конечное), если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что

$$|f(z)| > \varepsilon \text{ как только } 0 < |z - a| < \delta.$$

3). $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$ (A – конечное), если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что

$$|f(z) - A| < \varepsilon \text{ как только } |z| > \delta.$$

Пример 2.6. Существует ли $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$?

Решение. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - iy}{x + iy} = \begin{cases} 1, & y = 0, x \rightarrow 0, \\ -1, & x = 0, y \rightarrow 0. \end{cases}$ Следовательно, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ не существует.

Теорема 2.1. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $A = a + ib$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b.$$

Доказательство. Так как $|f(z) - A| = \sqrt{[u(x, y) - a]^2 + [v(x, y) - b]^2}$, то

$$|f(z) - A| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow z_0 \Leftrightarrow u(x, y) - a \rightarrow 0, \quad v(x, y) - b \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0.$$

Эта теорема позволяет перенести на функции комплексного переменного основные свойства предела функций двух действительных переменных.

Определение непрерывности для функции комплексного переменного совпадает с аналогичным определением для функции действительного переменного.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной** в точке z_0 , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Для непрерывности функции комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0) (следует из теоремы 2.1).

Это позволяет перенести на функции комплексного переменного основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных.

2.3. Дифференцируемые функции

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой** в точке z_0 , если она имеет в этой точке производную

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}.$$

Из определения производной и свойств предела функции следует, что для функций комплексного переменного сохраняются основные правила дифференцирования суммы, произведения, частного, правило дифференцирования сложной функции:

$$[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z),$$

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)},$$

$$[f(w(z))]'_z = f'_w \cdot w'_z.$$

Выясним, при каких условиях функция $f(z)$ будет дифференцируемой.

Теорема 2.2. Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ – дифференцируемы в точке (x, y) .

Функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ будет дифференцируемой в точке $z = x + i y$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия Коши-Римана:

$$\boxed{u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x} . \quad (2.10)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z , т.е. существует предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u(x, y) + i \Delta v(x, y)}{\Delta x + i \Delta y},$$

причем этот предел не зависит от способа стремления Δx и Δy к нулю. В частности, при $\Delta y = 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ имеем

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u(x, y) + i \Delta_x v(x, y)}{\Delta x} = u'_x + i v'_x.$$

При $\Delta x = 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ имеем

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u(x, y) + i \Delta_y v(x, y)}{i \Delta y} = v'_y - i u'_y.$$

Сравнивая эти равенства, получим: $u'_x + i v'_x = v'_y - i u'_y \Rightarrow u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x$.

Достаточность. Пусть выполнены условия Коши-Римана и функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ – дифференцируемы. Тогда

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o(\rho),$$

$$\Delta v = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o(\rho).$$

Здесь $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$. Тогда

$$\Delta f(z) = \Delta u + i \Delta v = (u'_x + i v'_x) \Delta x + (u'_y + i v'_y) \Delta y + o(|\Delta z|).$$

Во второй скобке этого равенства воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$u'_y + i v'_y = -v'_x + i u'_x = i^2 v'_x + i u'_x = i(u'_x + i v'_x);$$

$$\Delta f(z) = (u'_x + i v'_x) \Delta x + i(u'_x + i v'_x) \Delta y + o(|\Delta z|) = (u'_x + i v'_x)(\Delta x + i \Delta y) + o(|\Delta z|) = (u'_x + i v'_x) \Delta z + o(|\Delta z|).$$

Поэтому существует производная

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(u'_x + i v'_x) \Delta z + o(|\Delta z|)}{\Delta z} = u'_x + i v'_x + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z} = u'_x + i v'_x,$$

т.е. функция $f(z)$ – дифференцируема, причем $f'(z) = u'_x + i v'_x$.

Следствие 1. Если для функции $f(z)$ выполняются условия Коши-Римана, то

$$\boxed{f'(z) = u'_x + i v'_x = v'_y - i u'_y = u'_x - i u'_y = v'_y + i v'_x}.$$

Первая из этих формул получена при доказательстве теоремы, остальные формулы следуют из условий Коши-Римана.

Следствие 2. Элементарные функции $\sin z$, $\cos z$, e^z , z^n , $\ln z$ ($z \neq 0$), $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ – дифференцируемы, причем

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (e^z)' = e^z, \quad (z^n)' = n z^{n-1},$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} (z \neq 0), (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

Докажем это утверждение, например, для функции $\sin z$. Для этого выделим действительную и мнимую части этой функции:

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cdot \cos(iy) + \cos x \cdot \sin(iy) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y; \Rightarrow$$

$$u(x, y) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Проверим условия Коши-Римана:

$$u'_x = \cos x \cdot \operatorname{ch} y = v'_y, \quad u'_y = \sin x \cdot \operatorname{sh} y = -v'_x.$$

Так как условия Коши-Римана выполняются, то функция $\sin z$ – дифференцируема и

$$(\sin z)' = u'_x + i v'_x = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y = \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy) = \cos(x + iy) = \cos z.$$

Пример 2.7. Исследовать, будет ли дифференцируема функция $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$.

Решение. Учитывая, что $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$, получим

$$f(z) = (x + iy)x = x^2 + ixy.$$

Таким образом, мы выделили у функции $f(z)$ ее действительную часть $u = x^2$ и мнимую часть $v = xy$. Найдем частные производные этих функций: $u'_x = 2x$, $v'_x = y$, $u'_y = 0$, $v'_y = x$. Условия Коши-Римана $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ выполняются только при $x = y = 0$. Поэтому функция $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$.

Геометрический смысл аргумента и модуля производной

1). На плоскости (z) рассмотрим точки z_0 и z , кривую γ , их соединяющую, и угол φ наклона секущей $z_0 z$ (рис. 8).

При отображении $w = f(z)$ получим в плоскости (w) их образы: точки w_0 и w , кривую Γ , их соединяющую, и угол θ наклона секущей $w_0 w$ (рис. 9).

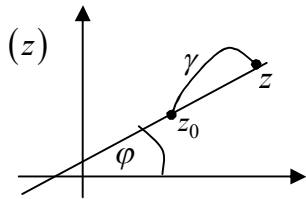


Рис. 8

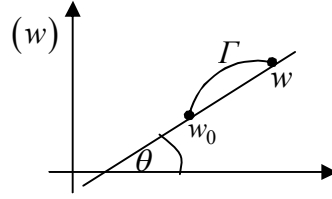


Рис. 9

По определению производной

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w - w_0}{z - z_0}. \quad (2.11)$$

Так как при делении комплексных чисел их аргументы вычитаются, то из равенства (2.11) следует, что

$$\arg f'(z_0) = \lim_{w \rightarrow w_0} \underbrace{\arg(w - w_0)}_{\text{угол } \theta} - \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\arg(z - z_0)}_{\text{угол } \varphi}.$$

При $z \rightarrow z_0$ имеем: $w \rightarrow w_0$, угол наклона φ секущей $z_0 z$ стремится к углу наклона φ_0 касательной к кривой γ в точке z_0 , угол наклона θ секущей $w_0 w$

стремится к углу наклона θ_0 касательной к кривой Γ в точке w_0 . Поэтому

$$\arg f'(z_0) = \theta_0 - \varphi_0.$$

Это равенство выражает *геометрический смысл аргумента производной*:

$\arg f'(z_0)$ есть угол поворота касательной к кривой γ в точке z_0 при отображении $f(z)$.

Пусть γ_1 – другая кривая, проходящая через точку z_0 ,

φ_1 – угол наклона ее касательной к оси ox ,

Γ_1 – образ γ_1 , проходящий через точку w_0 ,

θ_1 – угол наклона ее касательной к оси ox .

Тогда $\arg f'(z_0) = \theta_0 - \varphi_0$, $\arg f'(z_0) = \theta_1 - \varphi_1$. Вычитая эти два равенства, получим

$$\theta_1 - \theta_0 = \varphi_1 - \varphi_0, \text{ т.е.}$$

угол между образами кривых в точке w_0 равен углу между кривыми в точке z_0 .

Это есть свойство сохранения или консерватизма углов в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

2). Из равенства (3.1) следует:

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} \approx \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} \Rightarrow |w - w_0| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|, \text{ т.е.}$$

$$|\Delta w| \approx |f'(z_0)| \cdot |\Delta z|.$$

Это равенство выражает *геометрический смысл модуля производной*:

величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент изменения (подобия) длины любой бесконечно малой дуги, выходящей из точки z_0 при отображении $w = f(z)$.

Так как коэффициент изменения (подобия) одинаков для любой бесконечно малой дуги, выходящей из точки z_0 , то это свойство называют свойством постоянства растяжений.

Пример 2.8. Найти угол поворота и коэффициент подобия любой малой кривой, выходящей из точки z_0 при отображении $f(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$.

Решение. Найдем производную этой функции в точках z и z_0 :

$$f'(z) = \frac{1 \cdot (z - \bar{z}_0) - 1 \cdot (z - z_0)}{(z - \bar{z}_0)^2} = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2}, \quad f'(z_0) = \frac{1}{z_0 - \bar{z}_0} = \frac{1}{(x_0 + i y_0) - (x_0 - i y_0)} = \frac{-i}{2y_0}.$$

Тогда угол поворота любой кривой, проходящей через точку z_0 , при данном отображении равен $\arg f'(z_0) = \frac{\pi}{2}$, если $y_0 < 0$ и равен $\arg f'(z_0) = \frac{-\pi}{2}$, если $y_0 > 0$.

Коэффициент подобия в точке z_0 равен $|f'(z_0)| = \left| \frac{-i}{2y_0} \right| = \frac{1}{2|y_0|} \quad (y_0 \neq 0)$.

2.4. Аналитические функции

В теории функций комплексного переменного важную роль играет класс аналитических функций. Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической в точке** z , если она дифференцируема в этой точке и в некоторой ее окрестности.

Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической в области** D , если она является аналитической в каждой точке этой области.

Укажем ряд свойств аналитических функций.

- 1). Функция $f(z)$ является аналитической в области D тогда и только тогда, когда в этой области ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши-Римана.
- 2). Сумма, разность, произведение, суперпозиция аналитических функций являются функциями аналитическими. Частное аналитических функций является аналитической функцией, если знаменатель не обращается в нуль.
- 3). Пусть функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ является аналитической в области D . Тогда в этой области функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ являются гармоническими, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = 0}, \quad \boxed{v''_{xx} + v''_{yy} = 0}. \quad (2.12)$$

Докажем это свойство. Так как функция $f(z)$ является аналитической, то ее действительная и мнимая части $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$. Продифференцируем первое равенство по x , второе – по y :

$$u''_{xx} = v''_{xy}, \quad u''_{yy} = -v''_{xy}.$$

Складывая эти равенства, получим: $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Аналогично доказывается, что функция $v(x, y)$ также является гармонической.

Отметим, что из гармоничности функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ не следует аналитичность функции $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Например, для функции $f(z) = \bar{z} = x - i y$ ее действительная и мнимая части $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ являются функциями гармоническими, но не удовлетворяют условиям Коши-Римана, т.е. функция $f(z) = \bar{z}$ не является аналитической.

- 4). Если известна действительная или мнимая часть аналитической функции $f(z)$, то с точностью до постоянной может быть восстановлена сама функция $f(z)$.

Пусть, например, известна $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Требуется найти $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$. Воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$v'_x = -u'_y, \quad v'_y = u'_x. \quad (2.13)$$

Первое из этих равенств проинтегрируем по x с точностью до константы $c(y)$, не зависящей от переменной интегрирования

$$v = -\int u'_y dx + c(y).$$

Для отыскания $c(y)$ следует подставить найденную функцию $v(x, y)$ во второе из равенств (2.13).

Пример 2.9. Найти аналитическую функцию $f(z)$, у которой

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 - y.$$

Решение. Требуется найти $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$u'_x = v'_y = 6x^2 - 6y^2 - 1, \quad u'_y = -v'_x = -12xy. \quad (2.14)$$

Равенство $u'_x = 6x^2 - 6y^2 - 1$ проинтегрируем по x :

$$u = \int (6x^2 - 6y^2 - 1) dx = 2x^3 - 6y^2x - x + c(y).$$

Для отыскания $c(y)$ подставим найденную функцию $u(x, y)$ во второе из равенств (2.14)

$$u'_y = -12xy: \quad u'_y = -12xy = -12xy + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} u &= 2x^3 - 6y^2x - x + c, \\ f(z) &= u + iv = (2x^3 - 6y^2x - x + c) + i(6x^2y - 2y^3 - y) = \\ &= -(x + iy) + 2(x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3) + c = -(x + iy) + 2(x + iy)^3 + c. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(z) = 2z^3 - z + c$.

3. Интегрирование функций

3.1. Определение и свойства интеграла

Пусть (L) — гладкая ориентированная дуга на комплексной плоскости z , $f(z)$ — непрерывная функция, заданная на дуге (L) . Разобьем дугу (L) произвольным образом на n ячеек (элементарных дуг) точками z_1, z_2, \dots, z_n (рис. 10). В этих ячейках выберем произ-

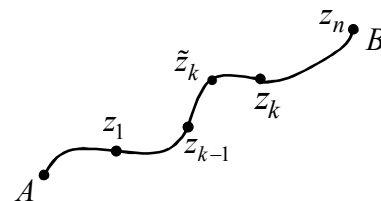


Рис. 10

вольно точки $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n$. Составим сумму $\sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \cdot \Delta z_k$,

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(z)$ по дуге (L) . Найдем предел интегральной суммы при стремлении к нулю величины $d = \max_{1 \leq k \leq n} \{|\Delta z_k|\}$.

Если существует предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \cdot \Delta z_k$ при $d \rightarrow 0$, не зависящий от способа разбиения дуги L и от выбора промежуточных точек \tilde{z}_k , то этот предел называется интегралом функции $f(z)$ по дуге L и обозначается $\int_{(L)} f(z) dz$:

$$\int_{(L)} f(z) dz = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \cdot \Delta z_k. \quad (3.1)$$

Для обозначения интеграла по замкнутому контуру используется знак \oint_L .

Свойства интеграла

$$1). \int_{(L)} f(z) dz = \int_{(L)} [u(x, y) + i v(x, y)] (dx + i dy) = \int_{(L)} [u dx - v dy] + i \int_{(L)} [v dx + u dy].$$

2). При изменении ориентации дуги интеграл $\int_{(L)} f(z) dz$ меняет знак.

$$3). \int_{(L)} [\lambda f(z) + \mu g(z)] dz = \lambda \int_{(L)} f(z) dz + \mu \int_{(L)} g(z) dz.$$

4). Пусть $|f(z)| \leq M$ на дуге (L) . Тогда $\left| \int_{(L)} f(z) dz \right| \leq M \cdot L$, где L — длина дуги.

5). Пусть $z = z(t)$ есть параметрическое уравнение дуги AB , причём концам дуги A и B соответствуют значения параметров t_A и t_B . Тогда

$$\int_{(AB)} f(z) dz = \int_{t_A}^{t_B} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.2)$$

Эти свойства следуют из определения интеграла; например, приведем вывод свойства 4):

$$|f(\tilde{z}_k)| \leq M \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \cdot \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\tilde{z}_k)| \cdot |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq M \cdot L.$$

Формулу (3.2) удобно использовать для вычисления интеграла. Покажем это на следующем примере.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $I_n = \oint_{(L)} \frac{dz}{(z - z_0)^n}$ по окружности с центром в

точке z_0 радиусом R , ориентированной против часовой стрелки.

Решение. Вычислим этот интеграл, используя равенство (3.2). Для этого запишем параметрические уравнения окружности: $x - x_0 = R \cos t$, $y - y_0 = R \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Отсюда $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = R \cos t + i R \sin t = R \cdot e^{it}$, т.е. мы получили **параметрическое уравнение окружности** в комплексной форме

$$z = z_0 + R e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (3.3)$$

Вычислим $dz = z'_t dt = R \cdot i e^{it} dt$ и подставим в интеграл:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{R i e^{it} dt}{(R e^{it})^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt.$$

Следует различать два случая. При $n = 1$ имеем: $I_1 = i \int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi i$.

При $n \neq 1$ получим: $I_n = \frac{i}{R^{n-1}} \cdot \frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{R^{(n-1)}(1-n)} [e^{2\pi i(1-n)} - e^0]$.

Число $2\pi i \cdot (1-n)$ кратно периоду $2\pi i$ показательной функции, поэтому $e^{2\pi i(1-n)} = e^0$ и $I_n = 0$ ($n \neq 1$). Таким образом,

$$\oint_{(L)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Пример 3.2. Вычислить интеграл $\int_{(L)} z \cdot \operatorname{Re} z \, dz$

а) по отрезку OA ; б) по отрезку AB ; в) по отрезку BO ; г) по ломаной $OABO$ (рис. 11).

Решение.

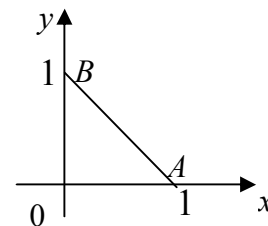


Рис. 11

а). На отрезке OA : $y=0$, $z=x+iy=x$, $dz=dx$, $\operatorname{Re} z=x$. Поэтому

$$I_1 = \int_{OA} z \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 x \cdot x \, dx = \frac{1}{3}.$$

б). На отрезке AB : $y=1-x$, $z=x+iy=x+i(1-x)$, $dz=(1-i)dx$, $\operatorname{Re} z=x$. Поэтому

$$I_2 = \int_{AB} z \operatorname{Re} z \, dz = \int_1^0 [x+i(1-x)] \cdot x(1-i) \, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i.$$

в). На отрезке BO : $x=0$, $z=x+iy=iy$, $dz=i \, dy$, $\operatorname{Re} z=0$, $x \in [0,1]$. Поэтому

$$I_3 = \int_{BO} z \operatorname{Re} z \, dz = \int_1^0 iy \cdot 0 \cdot i \, dy = 0.$$

г). $\int_{OABO} z \operatorname{Re} z \, dz = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\right) + 0 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}i.$

3.2. Интегральные теоремы

Введем следующие понятия. Область D назовем односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости принадлежит D . В противном случае область называется многосвязной. Выражаясь образно, односвязная плоская область – это область без дырок (рис. 12), а многосвязная область – это область с дырками (рис. 13).

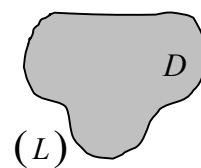


Рис. 12

Теорема Коши (для односвязной области).

Пусть функция $f(z)$ является *аналитической* в *односвязной* области D .

Тогда интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой замкнутой кривой L из области D равен нулю, т.е.

$$\oint_{(L)} f(z) \, dz = 0. \quad (3.4)$$

Доказательство. Для упрощения доказательства будем предполагать непрерывность производной $f'(z)$. Запишем интеграл в виде

$$\int_{(L)} f(z) dz = \int_{(L)} [u dx - v dy] + i \int_{(L)} [v dx + u dy]$$

и применим формулу Грина $\oint_{(L)} P dx + Q dy = \iint_{(D)} (Q'_x - P'_y) dx dy$ (рис. 12):

$$\int_{(L)} [u dx - v dy] = \iint_{(D)} [-v'_x - u'_y] dx dy, \quad \int_{(L)} [v dx + u dy] = \iint_{(D)} [u'_x - v'_y] dx dy.$$

В силу условий Коши-Римана $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ подынтегральные выражения в каждом из двойных интегралов равны нулю и поэтому эти интегралы равны нулю, а значит, $\oint_{(L)} f(z) dz = 0$.

Пример 3.3. Вычислить интеграл $I = \oint \left(z^3 + e^z + z \cdot \operatorname{Re} z + \frac{e^z \cdot \sin z}{(z+1)^5} \right) dz$ по ломаной $OABO$ (рис. 11).

Решение. Функция $z^3 + e^z + \frac{e^z \cdot \sin z}{(z+1)^5}$ является аналитической внутри контура

$OABO$ (нуль знаменателя – точка $z = -1$ лежит вне области, ограниченной этим контуром); область, ограниченная линией интегрирования, является односвязной. Поэтому по теореме Коши

$$I_1 = \oint_{OABO} \left(z^3 + e^z + \frac{e^z \cdot \sin z}{(z+1)^5} \right) dz = 0.$$

Функция $z \cdot \operatorname{Re} z$, как показано в примере 2.7, не является аналитической.

Интеграл от нее вычислен в примере 3.2: $I_2 = \int_{OABO} z \cdot \operatorname{Re} z dz = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}i$. Поэтому

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}i.$$

Теорема Коши (для многосвязной области). Пусть

1) D – **многосвязная область**, ограниченная внешним контуром L и внутренними контурами L_1, L_2, \dots, L_n (рис. 13),

2) контуры L, L_1, L_2, \dots, L_n одинаково ориентированы (например, против хода часовой стрелки),

3) функция $f(z)$ является **аналитической** в области D и непрерывной в замкнутой области \bar{D} .

Тогда интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам, т.е.

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{L_1} f(z) dz + \oint_{L_2} f(z) dz + \dots + \oint_{L_n} f(z) dz. \quad (3.5)$$

Доказательство. Для простоты ограничимся областью, ограниченной внешним контуром L и только одним внутренним контуром L_1 . Сделаем разрез по линии AB (рис. 14). Обозначим через D' – область D с разрезом по линии AB . Эта область будет односвязной с границей L' . По теореме Коши для односвязной области $\oint_{L'} f(z) dz = 0$. Здесь граница L' состоит из

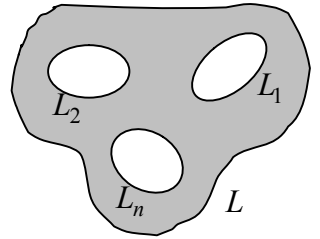


Рис. 13

линии L , обходимой против часовой стрелки (обозначим ее L^+), линии AB , линии L_1 , обходимой по часовой стрелке (обозначим ее L_1^-), и линии BA . Поэтому

$$\oint_{L'} f(z) dz = \oint_{L^+} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \oint_{L_1^-} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0.$$

При изменении ориентации дуги интегралы меняют знак. Поэтому имеем

$$\oint_{L^+} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz - \oint_{L_1^+} f(z) dz - \int_{AB} f(z) dz = 0.$$

Значит, $\oint_{L^+} f(z) dz = \oint_{L_1^+} f(z) dz$, что и требовалось доказать.

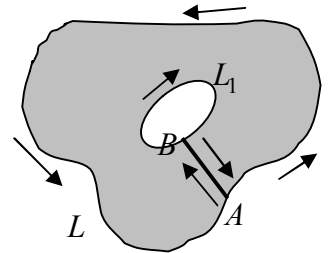


Рис. 14

Пример 3.4. Вычислить интеграл $I_n = \oint_{(L)} \frac{dz}{(z - z_0)^n}$ по произвольной замкнутой линии, ориентированной против часовой стрелки.

Решение. Рассмотрим два случая.

1). Если точка z_0 расположена внутри контура (L) , то функция $\frac{1}{(z - z_0)^n}$

неаналитична внутри контура (L) , т.к. знаменатель обращается в ноль в точке z_0 , но эта функция является аналитической в многосвязной области (рис. 15), ограниченной контуром (L) и окружностью (γ) . Поэтому по теореме Коши для многосвязной области интеграл I_n по внешнему контуру (L) равен интегралу по внутреннему контуру – окружности (γ) , который был вычислен в примере 3.1, т.е.

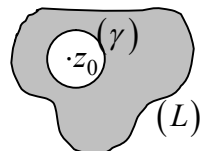


Рис. 15

$$I_n = \oint_{(L)} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \oint_{(\gamma)} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

2). Если точка z_0 расположена вне контура (L) , то функция $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ аналитична внутри контура (L) , т.к. там знаменатель не обращается в ноль. Поэтому по теореме Коши для односвязной области интеграл I_n по контуру (L) равен нулю.

$$\text{Окончательно, } I_n = \oint_{(L)} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \text{ и } z_0 - \text{внутри } (L), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема (о первообразной). Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и $\oint_L f(\tau) d\tau = 0$ по любому замкнутому контуру L из области D . Тогда

1) интеграл $\int_{z_0}^z f(\tau) d\tau$ не зависит от формы кривой $z_0 z$, обозначается $\int_{z_0}^z f(\tau) d\tau$ и является аналитической функцией $F(z)$ в области D ,

2) $F'(z) = \left(\int_{z_0}^z f(\tau) d\tau \right)' = f(z)$, т.е. $F(z)$ является первообразной для $f(z)$.

Доказательство теоремы опустим.

Из этой теоремы следуют формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^z f(\tau) d\tau = F(z) - F(z_0),$$

где $F(z)$ – первообразная для $f(z)$, и формула интегрирования по частям

$$\int_{z_0}^z u(\tau) dv(\tau) = u(\tau)v(\tau) \Big|_{z_0}^z - \int_{z_0}^z v(\tau) du(\tau).$$

Вывод этих формул такой же, как для функции действительного переменного.

Пример 3.5. Вычислить $I = \int_L z \cdot e^z dz$ по линии L , соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = \pi i$.

Решение. Функция $z \cdot e^z$ является аналитической, значит интеграл не зависит от формы линии, поэтому запишем его в виде $\int_0^{\pi i} z \cdot e^z dz$. Применим к нему метод

интегрирования по частям, взяв $u = z$, $dv = e^z dz$. Тогда $du = dz$, $v = e^z$,

$$I = \int_0^{\pi i} z \cdot e^z dz = z \cdot e^z \Big|_0^{\pi i} - \int_0^{\pi i} e^z dz = \left(z e^z - e^z \right) \Big|_0^{\pi i} = \pi i \cdot e^{\pi i} - e^{\pi i} + 1.$$

Так как $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, то интеграл $I = 2 - \pi i$.

3.3. Интегральные формулы Коши

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является *аналитической* в односвязной области D . Тогда в любой внутренней точке a области D имеют место формулы Коши

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z-a}, \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad (3.6)$$

где L – положительно ориентированная кривая в области D , охватывающая точку a .

Доказательство. 1). Функция $\frac{f(z)}{z-a}$ неаналитична в области D (знаменатель в точке a этой области равен нулю), но эта функция аналитична в многосвязной области D с удаленной из нее окрестностью точки a (рис. 16). Поэтому по теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z-a} = \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a},$$

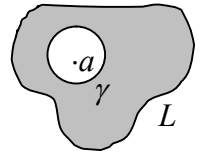


Рис. 16

где γ есть окружность $|z-a|=r$. Преобразуем интеграл

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_\gamma \frac{[f(z)-f(a)]+f(a)}{z-a} dz = \oint_\gamma \frac{[f(z)-f(a)]}{z-a} dz + \oint_\gamma \frac{f(a)}{z-a} dz = I_1 + I_2.$$

Для вычисления интеграла I_2 воспользуемся результатом примера 3.4:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \Rightarrow I_2 = \oint_\gamma \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a) \oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

Для вычисления интеграла I_1 воспользуемся непрерывностью функции $f(z)$ в точке a :

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a) \Rightarrow \text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(z) - f(a)| < \varepsilon, \text{ как только } |z-a| < \delta.$$

Тогда на окружности γ с радиусом $r < \delta$ получим:

$$\frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} < \frac{\varepsilon}{r} \Rightarrow |I_1| = \left| \oint_\gamma \frac{[f(z) - f(a)]}{z-a} dz \right| < \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon \text{ для } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow I_1 = 0.$$

Итак,

$$I_1 = 0, I_2 = 2\pi i f(a) \Rightarrow \oint_L \frac{f(z)dz}{z-a} = I_1 + I_2 = 2\pi i f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z-a}.$$

2). Вторую из формул (3.6) можно доказать продифференцировав n раз по параметру a только что полученное равенство $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z-a}$:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_L \frac{f(z)dz}{z-a} \right)'_a = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \left(\frac{f(z)}{z-a} \right)'_a dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) \cdot (-1)}{-(z-a)^2} dz = \frac{1!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz,$$

$$f''(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \left(\frac{f(z)}{(z-a)^2} \right)'_a dz = \frac{2!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz, \dots$$

Замечания

1). Из теоремы следует, что аналитическая функция $f(z)$ имеет производные любого порядка в произвольной внутренней точке a области D .

Отметим, что из дифференцируемости действительной функции не следует существование даже второй производной; например, функция $y = x^{3/2}$ имеет первую производную $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, но вторая производная $y'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$ не существует в точке $x = 0$.

2). Интегральные формулы Коши можно переписать в виде

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i \cdot f(a), \quad \oint_L \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \quad (3.7)$$

и использовать для вычисления соответствующих интегралов при условии, что точка a находится внутри контура L . Если точка a находится вне контура L , то подынтегральная функция является аналитичной, поэтому по теореме Коши эти интегралы равны нулю.

Пример 3.6. Вычислить интегралы $I_1 = \oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^4} dz$, $I_2 = \oint_{|z|=1/2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^4} dz$.

Решение. В первом интеграле точка $z=1$ находится внутри контура интегрирования $|z|=2$ (рис. 17), поэтому по второй из формул (3.7) при $n=3$ имеем

$$I_1 = \oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} (e^{2z})''' \Big|_{z=1} = \frac{8\pi i}{3} e^2.$$

Во втором интеграле точка $z=1$ находится вне контура интегрирования $|z|=1/2$; внутри этого контура подынтегральная функция является аналитичной, поэтому по теореме Коши интеграл I_2 равен нулю.

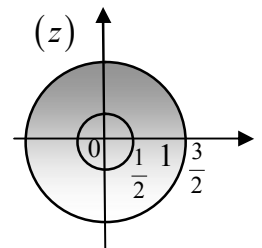


Рис. 17

Пример 3.7. Вычислить интеграл $I = \oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2+1} dz$.

Решение. Внутри контура γ (рис. 18) знаменатель функции обращается в нуль в точках $z_1=i$, $z_2=-i$. Построим окружности γ_1 , γ_2 с центрами в этих точках достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали внутри контура γ . В многосвязной области, ограниченной внешним контуром γ и внутренними контурами γ_1 , γ_2 , подынтегральная функция является аналитической (т. к. нули знаменателя не входят в эту область); поэтому применима теорема Коши для многосвязной области:

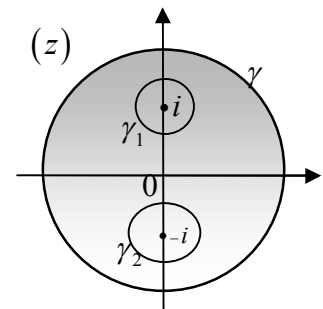


Рис. 18

$$I = \oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+1} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2+1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z^2+1} dz.$$

Разложим $z^2+1 = z^2 - i^2$ на множители $(z-i)(z+i)$, затем в интеграле по кривой γ_1 , окружающей точку i , в знаменателе оставим $z-i$, а в интеграле по кривой γ_2 , окружающей точку $-i$, в знаменателе оставим $z+i$ и применим для каждого интеграла первую из формул Коши (3.7):

$$I = \oint_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{\sin z}{z+i}\right)}{z-i} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\left(\frac{\sin z}{z-i}\right)}{z+i} dz = 2\pi i \left(\frac{\sin z}{z+i}\right) \Big|_{z=i} + 2\pi i \left(\frac{\sin z}{z-i}\right) \Big|_{z=-i} = \pi \sin i - \pi \sin(-i) = 2\pi \operatorname{sh} 1.$$

Теорема Морера (обратная к теореме Коши). Пусть

1) функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D ,

2) $\oint_L f(\tau) d\tau = 0$ по любому замкнутому контуру L из области D .

Тогда функция $f(z)$ является аналитической функцией в области D .

Доказательство. Из теоремы о первообразной следует, что функция $F(z) = \int_{z_0}^z f(\tau) d\tau$ является аналитической и $F'(z) = f(z)$. Но аналитическая функция имеет производные любого порядка, в частности, $\exists F''(z) = f'(z)$. Отсюда следует, что $\exists f'(z)$, следовательно, функция $f(z)$ является аналитической функцией.

4. Ряды в комплексной области

4.1. Числовые ряды

Напомним основные сведения о числовых комплексных рядах, которые были рассмотрены ранее в теории рядов.

Ряд из комплексных чисел $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называют сходящимся, если последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$ имеет конечный предел S . Этот предел называют суммой ряда.

Необходимый и достаточный признак сходимости ряда:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i y_n) \text{ сходится} \Leftrightarrow \text{ряды } \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ сходятся.}$$

Пример 4.1. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{i}{2^n} \right)$ на сходимость и найти его сумму.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница, так как его члены по абсолютной величине убывают и стремятся к нулю. Для вычисления его суммы запишем ряд Тейлора для функции $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad x \in (-1, 1].$$

В частности, при $x=1$ получим $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$, знаменателем

$q = \frac{1}{2}$ и суммой $\frac{b_1}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$. Окончательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{i}{2^n} \right)$ сходится и его сумма $S = \ln 2 + i$.

Необходимый признак сходимости ряда:

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Пример 4.2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + i \frac{3n^3 + 5}{10n^3 - 7} \right)$ на сходимость.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 5}{10n^3 - 7}$ расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5}{10n^3 - 7} = \frac{3}{10} \neq 0$. Следовательно, заданный ряд расходится.

Достаточный признак сходимости ряда: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и называется абсолютно сходящимся рядом.

Пример 4.3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{n/2} \cdot n^3}$ на сходимость.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(1+i)^n}{2^{n/2} \cdot n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1+i|^n}{2^{n/2} \cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(\sqrt{2})^n \cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Последний ряд сходится, поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

4.2. Функциональные ряды

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, составленный из функций $u_n(z)$, определенных на множестве D , и его n -ю частичную сумму $S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)$.

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *сходится* к функции $S(z)$ в точке z области D , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon, z)$ такой, что $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ для $\forall n > N$.

Определение 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *сходится равномерно* к функции $S(z)$ в области D , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ для любого $n > N$ и любого $z \in D$.

Отличие этих определений состоит в том, что в определении 2 найдется один номер $N(\varepsilon)$, обслуживающий все точки z области D , а в определении 1 номер

$N(\varepsilon, z)$ для каждой точки z свой.

Напомним один из признаков равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости: если $|u_n(z)| \leq a_n$ для любой точки z области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в области D .

Свойства равномерно сходящихся рядов

1). О непрерывности суммы ряда

Пусть функции $u_n(z)$ непрерывны в области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ в области D . Тогда сумма ряда $S(z)$ непрерывна в области D .

2). О почленном интегрировании ряда

Пусть функции $u_n(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой γ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ на кривой γ . Тогда ряд можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\gamma} u_n(z) dz \right).$$

3). О почленном дифференцировании ряда

Пусть функции $u_n(z)$ аналитичны в односвязной замкнутой области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ в области D . Тогда сумма ряда $S(z)$ аналитична в области D и ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, т.е.

$$S^{(k)}(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z).$$

Первое и второе свойства такие же, как в теории рядов с действительными членами. Поэтому их доказательства мы опускаем. Докажем третье свойство, которое отличается от аналогичного свойства для ряда с действительными членами.

Функции $u_n(z)$ аналитичны, а значит непрерывны в области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ в области D . Поэтому сумма ряда $S(z)$ непрерывна в области D и ряд можно почленно интегрировать по любой замкнутой кривой γ из области D , т.е.

$$\oint_{\gamma} S(z) dz = \oint_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\oint_{\gamma} u_n(z) dz \right).$$

Так как функции $u_n(z)$ аналитичны в области D , то по теореме Коши для односвязной области $\oint_{\gamma} u_n(z) dz = 0$. Тогда $\oint_{\gamma} S(z) dz = 0$ по любой замкнутой кривой γ из области D , и по теореме Морера функция $S(z)$ аналитична в области D .

Для обоснования почленного дифференцирования ряда рассмотрим произвольную точку z_0 из области D и окружность γ с уравнением $|z - z_0| = R$ из области D . Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ на γ и функция $\frac{1}{(z - z_0)^{k+1}}$ ограничена на γ , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ сходится равномерно к функции $\frac{S(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ на γ и его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\oint_{\gamma} \frac{S(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\gamma} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Из этого равенства, используя интегральные формулы Коши (3.7), получим

$$\frac{2\pi i}{k!} S^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi i}{k!} u_n^{(k)}(z_0) \Rightarrow S^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0).$$

Рассмотрим важный частный случай функционального ряда – степенной ряд.

Степенные ряды

Степенной ряд в комплексной области есть ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots,$$

где a_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), z, z_0 – комплексные числа.

Степенной ряд в комплексной области обладает следующими свойствами.

- 1). Областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ является круг $|z - z_0| < R$.
Этот круг может вырождаться в одну точку z_0 или во всю комплексную плоскость ($R = \infty$).
- 2). В круге $|z - z_0| \leq \rho$ ($\rho < R$) степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ сходится равномерно.
- 3). Сумма степенного ряда внутри круга сходимости является функцией аналитической.
- 4). Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз и почленно интегрировать.

Доказываются эти свойства так же, как в действительной области.

4.3. Разложение аналитической функции в степенной ряд

Рассмотрим сначала несколько примеров.

1). Функцию $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ можно трактовать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{b_1}{1-q} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots$, где $b_1 = 1$, $q = z^2$. Если $|q| < 1$, то

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots, \quad |z| < 1.$$

Заметим, что в круге $|z| < 1$ функция $\frac{1}{1-z^2}$ является аналитической и мы ее разложили в ряд по неотрицательным степеням z , называемый ее рядом Тейлора.

2). Разделим предыдущее равенство на z^3 . Получим разложение

$$\frac{1}{z^3(1-z^2)} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + z + z^3 + \dots,$$

которое, как и первое разложение, справедливо в круге $|z| < 1$, но с выколотой точкой $z = 0$ или, другими словами, в кольце $0 < |z| < 1$. Итак, функция $\frac{1}{z^3(1-z^2)}$,

аналитическая в кольце $0 < |z| < 1$, разложена в этом кольце в ряд, содержащий и положительные, и отрицательные степени z , т.е. в так называемый ряд Лорана.

3). По определению, $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$ для любого z , т.е. функция, аналитическая в круге $|z| < \infty$ бесконечного радиуса, разложена в этом круге в ряд Тейлора. Заменяя в последнем разложении z на $\frac{1}{z}$, получим

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z \cdot 1!} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \frac{1}{z^4 \cdot 4!} + \dots$$

Это разложение по отрицательным степеням z (т.е. в ряд Лорана) имеет место для любого z , отличного от нуля, т.е. в кольце $0 < |z| < \infty$.

В этих примерах функции, аналитические в круге, разложены в ряды, которые не содержат отрицательных степеней z , т.е. в ряды Тейлора; функции, аналитические в кольце, разложены в этом кольце в ряды, содержащие отрицательные степени z , т.е. в ряды Лорана.

Отмеченная закономерность имеет место не только в конкретных примерах, но и в общем случае. Точнее, имеют место следующие теоремы.

Теорема 4.1. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, разлагается в этом круге в ряд Тейлора по степеням $(z - z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{где } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

В замкнутом круге $|z - z_0| \leq \rho$ ($\rho < R$) ряд Тейлора сходится равномерно и его можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Доказательство. Возьмем произвольную точку z из круга $|z - z_0| < R$ и окруж-

ность γ_ρ радиуса ρ с центром в точке z_0 , содержащую точку z (рис. 19).

Воспользуемся интегральной формулой Коши (3.6)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta. \quad (4.1)$$

Преобразуем дробь $\frac{1}{\eta - z}$, выделив в ее знаменателе $(z - z_0)$:

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)}.$$

В знаменателе из двух величин $(\eta - z_0)$, $(z - z_0)$ вынесем за скобку наибольшую по модулю, т.е. $(\eta - z_0)$ (рис. 19)

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\eta - z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(z - z_0)}{(\eta - z_0)}}.$$

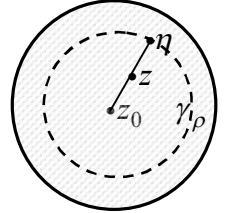


Рис. 19

Эту дробь можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1 = \frac{1}{\eta - z_0}$, $q = \frac{z - z_0}{\eta - z_0}$, причем $|q| = \left| \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right| < 1$.

Учитывая, что $\frac{b_1}{1-q} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots$, получим

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0} + \frac{1}{\eta - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{\eta - z_0} + \frac{1}{\eta - z_0} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}}.$$

Подставим в равенство (4.1) полученное выражение для $\frac{1}{\eta - z}$ в виде ряда и, внося $f(\eta)$ под знак суммы, почленно проинтегрируем ряд

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} f(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n,$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ или, с учетом формул Коши (3.7), $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Обоснуем возможность почленного интегрирования ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f(\eta) \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}}$ на

окружности γ_ρ . Действительно, $|\eta - z_0| = \rho$ на γ_ρ , а функция $f(\eta)$ является аналитической, а значит и непрерывной, и ограниченной по модулю, т.е.

$|f(\eta)| \leq M$. Поэтому $\left| f(\eta) \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}} \right| \leq M \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$ не зависит от η

и сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{|z - z_0|}{\rho}$, $0 < q < 1$.

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f(\eta) \frac{(z-z_0)^n}{(\eta-z_0)^{n+1}}$ по признаку Вейерштрасса сходится равномерно по η на γ_ρ и его можно почленно интегрировать по η на γ_ρ .

Кроме того, в замкнутом круге $|z-z_0| \leq \rho$ ($\rho < R$) ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, как степенной ряд, сходится равномерно. Следовательно, ряд Тейлора можно почленно интегрировать и дифференцировать. Теорема доказана.

Следствие. Радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Действительно, если R есть расстояние от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$, то в круге $|z-z_0| < R$ нет особых точек функции $f(z)$, т.е. функция является аналитической в этом круге и по теореме 4.1 разлагается в этом круге в ряд Тейлора.

Пример 4.4. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-6)}$ в ряд по степеням $(z-4)$.

Решение. 1). Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z=1$, $z=6$. От точки $z_0=4$ до ближайшей особой точки $z=6$ расстояние $R=2$. Поэтому функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $(z-4)$ в круге $|z-4| < 2$ (рис. 20).

2). Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-6)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-6}.$$

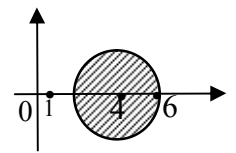


Рис. 20

После приведения к общему знаменателю получим

$$z = A(z-6) + B(z-1)(z-6) + C(z-1)^2 \Rightarrow \begin{array}{l|l} z=1 & 1 = -5A \quad A = -1/5 \\ z=6 & 6 = 25C \Rightarrow C = 6/25 \\ \text{при } z^2 & 0 = B+C \quad B = -6/25. \end{array}$$

3). Преобразуем дробь $\frac{1}{z-6}$, выделив в ее знаменателе $(z-4)$: $\frac{1}{z-6} = \frac{1}{(z-4)-2}$.

В знаменателе из двух величин $(z-4)$, (-2) вынесем за скобку большую по модулю в круге $|z-4| < 2$, т.е. (-2) (рис. 20)

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{(z-4)-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(z-4)}{2}}.$$

Тогда эту дробь можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей

геометрической прогрессии, где $b_1 = \frac{1}{-2}$, $q = \frac{z-4}{2}$, причем $|q| = \frac{|z-4|}{2} < 1$. Учитывая,

что $\frac{b_1}{1-q} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots$, получим $\frac{1}{z-6} = -\frac{1}{2} - \frac{z-4}{2^2} - \frac{(z-4)^2}{2^3} - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{2^{n+1}}.$

4). Преобразуем дробь $\frac{1}{z-1}$, выделив в ее знаменателе $(z-4)$: $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-4)+3}$.

В знаменателе из двух величин $(z-4)$, 3 вынесем за скобку большую по модулю в круге $|z-4| < 2$, т.е. 3

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-4)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(z-4)}{3}}.$$

Тогда эту дробь можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = -\frac{z-4}{3}$, причем $|q| = \frac{|z-4|}{3} < 1$. Учитывая, что $\frac{b_1}{1-q} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots$, получим

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{3} - \frac{z-4}{3^2} + \frac{(z-4)^2}{3^3} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-4)^n}{3^{n+1}}.$$

5). Продифференцируем полученное равенство:

$$\left(\frac{1}{z-1} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-4)^n}{3^{n+1}} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(z-4)^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Заменяя $n-1$ на k , получим

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(z-4)^{n-1}}{3^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)(z-4)^k}{3^{k+2}}.$$

6). Подставим полученные ряды в $f(z)$:

$$f(z) = \frac{-1/5}{(z-1)^2} + \frac{-6/25}{z-1} + \frac{6/25}{z-6} = \frac{-1}{25} \left[5 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(z-4)^n}{3^{n+2}} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-4)^n}{3^{n+1}} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{2^{n+1}} \right].$$

Окончательно, объединив три ряда в один, получим разложение функции $f(z)$ в ряд по степеням $(z-4)$ в круге $|z-4| < 2$:

$$f(z) = \frac{-1}{25} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-4)^n, \text{ где } c_n = \left((-1)^n \frac{5(n+1)}{3^{n+2}} + (-1)^n \frac{6}{3^{n+1}} + \frac{6}{2^{n+1}} \right).$$

Перейдем к разложению в ряд функций, аналитических в кольце.

Теорема 4.2. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, разлагается в этом кольце **в ряд Лорана** по степеням $(z - z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ где } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (4.2)$$

γ – контур из кольца, охватывающий точку z_0 .

В замкнутом кольце $r_1 \leq |z - z_0| \leq R_1$ ($r < r_1 < R_1 < R$) ряд Лорана сходится равномерно и его можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Доказательство опустим; оно аналогично доказательству предыдущей теоремы.

В теоремах 4.1 и 4.2 число R не обязательно конечное. Если $R = \infty$ и $z_0 = 0$, то круг $|z| < \infty$ есть вся комплексная плоскость, а кольцо $r < |z| < \infty$ есть окрестность бесконечности (см. рис. 22).

Формулы (4.2) для коэффициентов ряда Лорана на практике применяются редко, так как требуют громоздких вычислений. Обычно используют известные разложения в ряд элементарных функций.

Пример 4.5. Функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ разложить в ряд:

- а) в окрестности точки $z_0 = 0$;
- б) в окрестности бесконечности;
- в) в окрестности точки $z_0 = 2$.

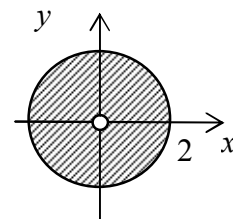


Рис. 21

Решение. Аналитичность функции нарушается в точках $z = 0$ и $z = 2$.

а). Выделим окрестность точки $z_0 = 0$, в которой функция является аналитической. Это кольцо $0 < |z| < 2$ (рис. 21). По теореме 4.2 в этом кольце функция

$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-2}$ разлагается в ряд Лорана по степеням z . Для разложения дроби $\frac{1}{z-2}$ по степеням z в знаменателе этой дроби из двух слагаемых z и -2 вынесем большее по модулю в кольце $0 < |z| < 2$, т.е. -2 : $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$. Эту дробь

можно рассматривать как сумму геометрической прогрессии $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots$

при $b_1 = 1$, $q = \frac{z}{2}$, $\left(|q| = \frac{|z|}{2} < 1\right)$. Таким образом, в кольце $0 < |z| < 2$ имеем

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{z}{2}\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots \right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{z(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Здесь ряд Лорана содержит только одну отрицательную степень $z^{-1}/2$.

б). Выделим окрестность бесконечности, в которой функция является аналитической. Это кольцо $2 < |z| < \infty$ (рис. 22). По теореме 4.2 в этом кольце функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана по степеням z . Применим

к дроби $\frac{1}{z-2}$ тот же прием, что и в предыдущем случае: в знаменателе из двух слагаемых z и -2 вынесем большее по модулю в кольце $2 < |z| < \infty$, т.е. в данном случае — это z :

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{z(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+2}}.$$

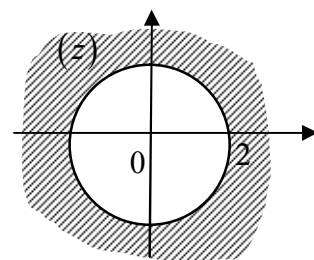


Рис. 22

Здесь ряд Лорана содержит бесконечно много отрицательных степеней z .

в). Выделим окрестность точки $z_0 = 2$, в которой функция $f(z)$ аналитична — это кольцо $0 < |z-2| < 2$ (рис. 23). По теореме 5.2 в этом кольце функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана по степеням $z-2$. Множитель $\frac{1}{z-2}$ является степенью $z-2$. Поэтому разложим

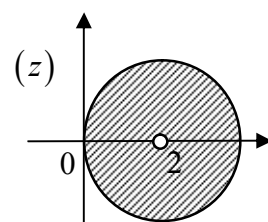


Рис. 23

в ряд только множитель $\frac{1}{z}$. Выделим в знаменателе $(z-2)$ и из двух слагаемых $(z-2)$ и 2 вынесем наибольшее по модулю в кольце $0 < |z-2| < 2$, т.е. 2

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-2}{2}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{z-2}{2^2} + \frac{(z-2)^2}{2^3} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Пример 4.6. Функцию $f(z) = \cos \frac{z}{z-1}$ разложить в ряд в окрестности точки $z_0 = 1$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет одну особую точку $z=1$; следовательно, $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z-1| < \infty$ и разлагается в этом кольце в ряд Лорана по степеням $(z-1)$. Для получения этого разложения сделаем преобразования

$$\cos \frac{z}{z-1} = \cos \frac{(z-1)+1}{z-1} = \cos \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \cos 1 \cos \frac{1}{z-1} - \sin 1 \sin \frac{1}{z-1}$$

и воспользуемся рядами для $\cos \frac{1}{z-1}$ и $\sin \frac{1}{z-1}$:

$$\cos \frac{z}{z-1} = \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n}} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$$

5. Теория вычетов

5.1. Нули функции

Точка $z=a$ является нулем функции $f(z)$ порядка k , если функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0. \quad (5.1)$$

Например, функция $f(z) = (z-i)^3(z+4)$ имеет два нуля: $z=i$ нуль третьего порядка и $z=-4$ нуль первого порядка (такой нуль называют простым нулем).

Функция $f(z) = 1 + e^z$ обращается в нуль при $z = \ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i$. Чтобы определить порядок этого нуля, запишем ряд Тейлора функции $f(z) = 1 + e^z$ по степеням $(z - \pi i)$, учитывая, что $f^{(n)}(\pi i) = e^{\pi i} = -1$:

$$f(z) = -(z - \pi i) - \frac{1}{2!}(z - \pi i)^2 - \frac{1}{3!}(z - \pi i)^3 - \dots = (z - \pi i) \left[-1 - \frac{1}{2!}(z - \pi i) - \frac{1}{3!}(z - \pi i)^2 - \dots \right],$$

т.е. $f(z) = (z - \pi i)\varphi(z)$, где $\varphi(z) = -1 - \frac{1}{2!}(z - \pi i) - \frac{1}{3!}(z - \pi i)^2 - \dots$, причем $\varphi(\pi i) = -1$.

Поэтому $z = \pi i$ есть нуль первого порядка для функции $f(z) = 1 + e^z$.

Рассмотрим более простой способ определения порядка нуля.

Теорема 5.1 (о порядке нуля).

Точка $z = a$ является нулем аналитической функции $f(z)$ порядка k тогда и только тогда, когда $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0, f^{(k)}(a) \neq 0$, (5.2)
т.е. порядок нуля равен порядку первой отличной от нуля производной.

Необходимость. Пусть $z = a$ есть нуль порядка k для $f(z)$. Тогда

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0.$$

Продифференцируем это равенство k раз:

$$f'(z) = (z-a)^k \varphi'(z) + k(z-a)^{k-1} \varphi(z),$$

$$f''(z) = (z-a)^k \varphi''(z) + 2k(z-a)^{k-1} \varphi'(z) + k(k-1)(z-a)^{k-2} \varphi(z),$$

.....

$$f^{(k-1)}(z) = (z-a)^k \varphi^{(k-1)}(z) + \dots + k(k-1)(k-2)\dots 1 \cdot (z-a) \varphi(z),$$

$$f^{(k)}(z) = (z-a)^k \varphi^{(k)}(z) + \dots + k! \varphi(z).$$

Вычислим эти производные в точке $z = a$:

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0, \quad f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) = k! \varphi(a) \neq 0.$$

Достаточность. Пусть $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0, f^{(k)}(a) \neq 0$. Тогда ряд Тейлора функции $f(z)$ по степеням $(z-a)$ примет вид:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \underbrace{\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(z-a)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \dots}_{=0} \Rightarrow$$

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z), \quad \text{где } \varphi(z) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a) + \dots, \quad \text{причем } \varphi(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0.$$

Следовательно, $z = a$ есть нуль порядка k для $f(z)$.

Пример 5.1. Найти нули функции $f(z) = (1 - \cos z)^3$ и определить их порядок.

Решение. Найдем нули функции

$$f(z) = (1 - \cos z)^3 = 0 \Rightarrow \cos z = 1 \Rightarrow z_k = 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Определим порядок нуля сначала для функции $g(z) = 1 - \cos z$. Так как $g'(z_k) = \sin z_k = 0, g''(z_k) = \cos z_k \neq 0$, то в силу теоремы 6.1 точки $z_k = 2\pi k$ являются нулями второго порядка для функции $g(z) = 1 - \cos z$, т.е. эту функцию можно представить в виде $g(z) = 1 - \cos z = (z - z_k)^2 \cdot \varphi(z), \varphi(z_k) \neq 0$. Тогда

$$f(z) = (1 - \cos z)^3 = (z - z_k)^6 \cdot \varphi^3(z), \quad \varphi^3(z_k) \neq 0.$$

Поэтому точки $z_k = 2\pi k$ являются нулями шестого порядка для функции $f(z)$.

5.2. Особые точки функции и их классификация

Особые точки функции – это точки, в которых нарушается ее аналитичность.

Особую точку называют изолированной, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек функции.

Например, функция $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$ имеет особые точки $z_0 = 0$, $z_k = \frac{1}{\pi k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

При этом точки $z_k = \frac{1}{\pi k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) являются изолированными, их можно отделить одну от другой окрестностью. Точка $z_0 = 0$ является неизолированной, так как в любую ее окрестность попадут некоторые из особых точек z_k .

В зависимости от того, каким будет предел функции в особой точке z_0 , различают три типа изолированных особых точек.

- 1). Если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ – конечен, то z_0 называют **устранимой** особой точкой.
- 2). Если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, то z_0 называют **полюсом**.
- 3). Если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует, то z_0 называют **существенно особой** точкой.

Например, для функции $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z-2)}$ особые точки $z = 1$, $z = 2$ являются полюсами, т.к. в этих точках предел функции равен бесконечности. Но это полюсы разного порядка: точку $z = 1$ называют полюсом 3-го порядка, точку $z = 2$ – полюсом 1-го порядка или простым полюсом.

Порядок полюса – это натуральное число k , такое, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k$ отличен от нуля и бесконечности. Более удобно определять порядок полюса, используя связь полюса с нулями.

Теорема 5.2. Пусть z_0 есть нуль порядка k функции $\varphi(z)$ и нуль порядка n функции $\psi(z)$; тогда для функции $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ точка z_0 есть полюс порядка $n - k$, если $k < n$, и устранимая особая точка, если $k \geq n$.

Доказательство. Так как точка z_0 есть нуль порядка k функции $\varphi(z)$ и нуль порядка n функции $\psi(z)$, то

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (z - z_0)^k \cdot \varphi_1(z), \quad \varphi_1(z_0) \neq 0, \\ \psi(z) &= (z - z_0)^n \cdot \psi_1(z), \quad \psi_1(z_0) \neq 0 \end{aligned} \Rightarrow f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{(z - z_0)^k \cdot \varphi_1(z)}{(z - z_0)^n \cdot \psi_1(z)}, \quad \frac{\varphi_1(z_0)}{\psi_1(z_0)} \neq 0.$$

Тогда при $k < n$ получим

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{n-k}} \cdot \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0)^{n-k} \neq 0.$$

Следовательно, точка z_0 является полюсом порядка $n-k$ функции $f(z)$.

При $k \geq n$ получим $f(z) = (z-z_0)^{k-n} \cdot \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$, $k-n \geq 0$. Следовательно, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ конечен и z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$.

Замечания

- 1). Если $\varphi(z_0) \neq 0$, то можно записать $\varphi(z) = (z-z_0)^0 \cdot \varphi(z)$ и считать z_0 нулем функции $\varphi(z)$ порядка $k=0$. Теорема 5.2 остается справедливой и в этом случае.
- 2). В частности, если точка z_0 является нулем порядка n функции $\psi(z)$, то точка z_0 является полюсом порядка n функции $\frac{1}{\psi(z)}$.

Пример 5.2. Определить типы особых точек функции $f(z) = \frac{z^2}{(1-\cos z)^3}$.

Решение. В примере 5.1 было установлено, что точки $z_i = 2\pi i$ ($i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются нулями порядка $n=6$ для функции $\psi(z) = (1-\cos z)^3$. Для функции $\varphi(z) = z^2$ точка $z_0 = 0$ является нулем порядка $k=2$, а точки $z_i = 2\pi i$ ($i \neq 0$) — нулями порядка $k=0$. Поэтому по теореме 5.2 точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка $n-k=6-2=4$, а точки $z_i = 2\pi i$ ($i \neq 0$) — полюсами порядка $n-k=6-0=6$.

Тип изолированной особой точки можно охарактеризовать также через разложение функции в ряд Лорана в выколотой окрестности этой точки.

Теорема 5.3 (о ряде Лорана в окрестности устранимой особой точки).

Точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в выколотой окрестности точки z_0 не содержит отрицательных степеней $(z-z_0)$.

Необходимость. Пусть точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$, тогда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ — конечен. Отсюда следует, что функция $f(z)$ ограничена по модулю в выколотой δ -окрестности точки z_0 ; в частности, $|f(z)| \leq M$ на окружности γ_r с уравнением $|z-z_0|=r$, где $r < \delta$. Оценим коэффициенты c_{-n} ряда Лорана, воспользовавшись формулой (4.2):

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{r^{-n+1}} \cdot 2\pi r = M \cdot r^n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Так как r можно взять сколь угодно малым, то все коэффициенты c_{-n} ряда Лорана при отрицательных степенях $(z-z_0)$ равны нулю.

Достаточность. Пусть разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержит отрицательных степеней $(z - z_0)$, т.е.

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Тогда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$, т. е. z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

Теорема 5.4 (о ряде Лорана в окрестности полюса)

Точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в выколотой окрестности точки z_0 содержит конечное число отрицательных степеней $(z - z_0)$, а именно

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_1}{(z - z_0)} + c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \dots \quad (c_0 \neq 0)$$

Необходимость. Пусть точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$, тогда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k$ отличен от нуля и бесконечности. Отсюда следует, что z_0 является устранимой особой точкой для функции $\varphi(z) = f(z)(z - z_0)^k$ и, значит, в ее ряде Лорана нет отрицательных степеней $(z - z_0)$, т.е.

$$\varphi(z) = f(z)(z - z_0)^k = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

причем $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k = c_0 \neq 0$. Тогда

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_1}{(z - z_0)} + c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \dots \quad (c_0 \neq 0).$$

Достаточность. Пусть разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит конечное число отрицательных степеней $(z - z_0)$, т.е.

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_1}{(z - z_0)} + c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \dots \quad (c_0 \neq 0).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z - z_0)^k} [c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots] = \infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k = \lim_{z \rightarrow z_0} [c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots] = c_0 \neq 0.$$

Следовательно, z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$.

Теорема 5.5 (о ряде Лорана в окрестности существенно особой точки)

Точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в выколотой окрестности точки z_0 содержит бесконечно много отрицательных степеней $(z - z_0)$.

Эта теорема следует из предыдущих теорем 5.3 и 5.4.

Пример 5.3. Исследовать особые точки функций $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$, $g(z) = e^{1/z}$.

Решение. Точка $z=0$ является особой точкой этих функций. Для установления ее типа воспользуемся разложениями в ряд функций $\sin z$, $e^{1/z}$:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots,$$

$$g(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1/z}{1!} + \frac{(1/z)^2}{2!} + \frac{(1/z)^3}{3!} + \dots = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \dots$$

В силу теоремы 5.4 для $f(z)$ точка $z=0$ является полюсом второго порядка.

В силу теоремы 5.5 для $g(z)$ точка $z=0$ является существенно особой точкой.

5.3. Вычеты функции в ее особых точках

Вычетом функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке z_0 называется число

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\gamma)} f(z) dz, \quad (5.3)$$

где γ^+ есть положительно ориентированная граница окрестности точки z_0 , не содержащая других особых точек функции (рис. 24).

Принято также другое обозначение вычета: $\operatorname{Выч}_{z=z_0} f(z)$.

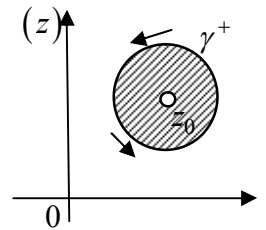


Рис. 24

Рассмотрим различные способы вычисления вычетов.

1). Вычисление вычета через коэффициент ряда Лорана

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки z_0 , проинтегрируем по положительно ориентированной окружности γ^+ с центром в точке z_0 и воспользуемся тем, что $\oint_{\gamma^+} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$ (пример 3.1):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow \oint_{\gamma^+} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{\gamma^+} (z - z_0)^n dz = c_{-1} \cdot 2\pi i \Rightarrow \operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z) dz = c_{-1}.$$

Итак, вычет функции $f(z)$ в ее особой точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} при $\frac{1}{z - z_0}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 :

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}. \quad (5.4)$$

Например, в разложении функции $z^2 e^{1/z}$ в окрестности особой точки $z_0 = 0$

$$z^2 e^{1/z} = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} + \dots \right) = z^2 + z + \frac{1}{3! z} + \frac{1}{5! z^3} + \dots$$

коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равняется $\frac{1}{3!}$, следовательно, $\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

2). Вычет в устранимой особой точке

В окрестности устранимой особой точки z_0 ряд Лорана функции не содержит отрицательных степеней $(z - z_0)$, следовательно, коэффициент $c_{-1} = 0$. Таким образом, в устранимой особой точке

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = 0}. \quad (5.5)$$

3). Вычисление вычета в полюсе первого порядка

Если z_0 есть полюс первого порядка функции $f(z)$, то разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 в силу теоремы 5.4 имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Умножим это равенство на $(z - z_0)$

$$f(z) \cdot (z - z_0) = c_{-1} + c_0 \cdot (z - z_0) + c_1 \cdot (z - z_0)^2 + c_2 \cdot (z - z_0)^3 + \dots$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot (z - z_0)) = c_{-1} = \operatorname{Res} f(z_0),$$

т.е. в полюсе первого порядка

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot (z - z_0))}. \quad (5.6)$$

4). Вычисление вычета функции $\frac{\varphi(z)}{g(z)}$, если $\varphi(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$.

Так как $\varphi(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, то z_0 является нулем порядка $k = 0$ функции $\varphi(z)$ и нулем порядка $n = 1$ функции $g(z)$; поэтому по теореме 5.2 точка z_0 является полюсом порядка $n - k = 1$ функции $\frac{\varphi(z)}{g(z)}$ и для вычисления вычета этой функции можно воспользоваться формулой (5.6)

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{g(z)} (z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Итак, в случае, когда $\varphi(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, справедлива формула

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{g(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}}. \quad (5.7)$$

5). Вычисление вычета в полюсе k -го порядка

Если z_0 есть полюс k -го порядка функции $f(z)$, то разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 в силу теоремы 5.4 имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \quad (c_{-k} \neq 0).$$

Умножим это равенство на $(z - z_0)^k$ и затем продифференцируем $k - 1$ раз:

$$f(z) \cdot (z - z_0)^k = c_{-k} + c_{-k+1} \cdot (z - z_0) + \dots + c_{-1} \cdot (z - z_0)^{k-1} + c_0 \cdot (z - z_0)^k + c_1 \cdot (z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

$$\left[f(z) \cdot (z - z_0)^k \right]^{(k-1)} = c_{-k} \cdot 0 + c_{-k+1} \cdot 0 + \dots + c_{-1} \cdot (k-1)! + c_0 \cdot k! \cdot (z - z_0) + c_1 \cdot \frac{(k+1)!}{2} (z - z_0)^2 + \dots$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[f(z) \cdot (z - z_0)^k \right]^{(k-1)} = c_{-1} \cdot (k-1)! = \text{Res } f(z_0) \cdot (k-1)!,$$

т.е. в полюсе k -го порядка

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[f(z) \cdot (z - z_0)^k \right]^{(k-1)}. \quad (5.8)$$

Пример 5.4. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ в ее особых точках.

Решение. Знаменатель $e^z - 1$ обращается в нуль в точке $z_0 = 0$ и, учитывая периодичность функции e^z , в точках $z_k = 2\pi ki$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Это и будут особые точки функции $f(z)$.

Точки $z_k = 2\pi ki$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются нулями порядка $n = 1$ для функции $g(z) = e^z - 1$, т.к. $g(z_k) = 0$, $g'(z_k) \neq 0$. Для функции $\varphi(z) = z$ точка $z_0 = 0$ является нулем порядка $k = 1$, а точки $z_k = 2\pi ki$ ($k \neq 0$) — нулями порядка $k = 0$. Поэтому по теореме 5.2 точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, а точки $z_k = 2\pi ki$ ($k \neq 0$) — полюсами порядка $n - k = 1 - 0 = 1$ функции $f(z)$.

Применяя формулы (5.5) и (5.7), получим

$$\text{Res } f(z_0) = 0, \quad \text{Res } f(z_k) = \left. \frac{z}{(e^z - 1)'} \right|_{z=z_k} = \frac{z_k}{e^{z_k}} = \frac{2\pi ki}{1} = 2\pi ki.$$

6. Применение вычетов

6.1. Применение вычетов к вычислению интегралов $\oint_L f(z) dz$

Теорема 6.1. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области D с положительно ориентированной границей L^+ за исключением изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , лежащих внутри D . Тогда

$$\oint_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z_k). \quad (6.1)$$

Доказательство. Удалим из области D (рис. 25) каждую особую точку вместе с ее окрестностью (границы окрестностей обозначим L_1, L_2, \dots, L_n). В получившейся многосвязной области функция будет аналитической. Применяя интегральную теорему Коши для многосвязной области, получим

$$\oint_{L^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^+} f(z) dz.$$

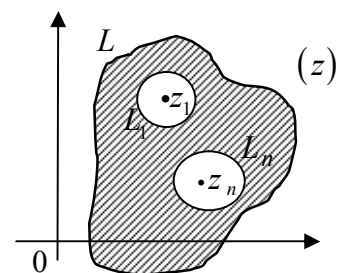


Рис. 25

Из определения вычета (5.3) следует, что $\oint_{L_k^+} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res } f(z_k)$. Поэтому

$$\oint_{L^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^+} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z_k).$$

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{z}{e^z - 1} dz$ по контуру $L: |z - \pi i| = 4$.

Решение. Контур L – это окружность с центром в точке $z = \pi i$ и с радиусом 4 (рис. 26). В примере 5.4 мы нашли особые точки функции $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$: это точки $z = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$. Из этих точек внутрь контура L попадают точки $z = 0$ и $z = 2\pi i$. Вычеты в этих точках были вычислены в примере 5.4. Применяя формулу (6.1), получим

$$\oint_{L^+} \frac{z}{e^z - 1} dz = 2\pi i [\text{Res } f(0) + \text{Res } f(2\pi i)] = 2\pi i (0 + 2\pi i) = -4\pi^2.$$

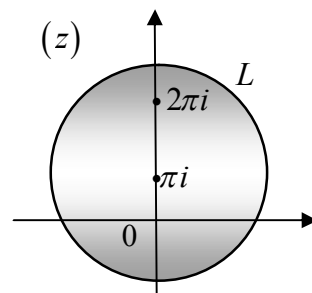


Рис. 26

Пример 6.2. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz$ по контуру $|z - i| = 3/2$ (рис. 27).

Решение. Контур $|z - i| = 3/2$ есть окружность с центром $z = i$ и радиусом $3/2$ (рис. 27). Подынтегральная функция $f(z)$ имеет три особые точки $z = 0, z = i, z = -i$. Внутри контура попадают особые точки $z = 0, z = i$.

Т. к. функция $f(z)$ – четная, то в разложении ее в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ нет нечетных степеней z , в частности, нет $\frac{1}{z}$. Поэтому

$$\text{Res } f(0) = c_{-1} = 0.$$

Вычет в точке $z = i$ для функции вида $\frac{\varphi(z)}{g(z)}$ в случае, когда $\varphi(z_0) \neq 0, g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$, можно вычислить по формуле (5.7), т.е.

$$\text{Res}_{z=i} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} = \left. \frac{e^{1/z^2}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Тогда по теореме 6.1

$$\oint_L \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i [\text{Res } f(0) + \text{Res } f(i)] = 2\pi i \left(0 + \frac{1}{e \cdot 2i} \right) = \frac{\pi}{e}.$$

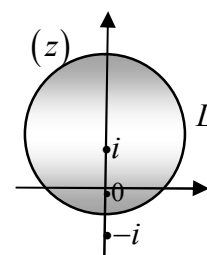


Рис. 27

Пример 6.3. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=1/2} \frac{e^{1/z}}{z^2 + 1} dz$ (рис. 28).

Решение. Подынтегральная функция $f(z)$ имеет три особые точки $z = 0, z = i, z = -i$. Внутри контура попадает существенно особая точка $z = 0$. Для вычисления вычета в этой особой точке разложим подынтегральную функцию $f(z)$ в ряд в окрестности $z = 0$ по степеням z :

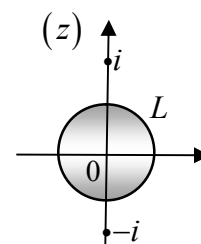


Рис. 28

$$f(z) = e^{1/z} \cdot \frac{1}{1 - (-z^2)} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^4 4!} + \frac{1}{z^5 5!} + \dots\right) \cdot (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots).$$

Вычислим коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$: $c_{-1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = \sin 1$. Используя разложение

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$ при $z = 1$, получим $c_{-1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = \sin 1$. Тогда

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{e^{1/z}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{1/z}}{z^2 + 1} = 2\pi i \cdot c_{-1} = 2\pi i \cdot \sin 1.$$

6.2. Применение вычетов к вычислению интегралов $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Здесь и дальше несобственный интеграл понимается в смысле главного значения.

Теорема 6.2. Пусть 1) функция $f(x)$ совпадает с $f(z)$ и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$,
2) функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_n ,
3) существуют положительные числа M, R_0, δ такие, что

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}} \quad \text{при условии, что } |z| = R \geq R_0. \quad (6.2)$$

Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ можно вычислить по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k), \quad \text{где } \operatorname{Im} z_k > 0. \quad (6.3)$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур L , состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности L_R (рис. 29).

Выберем R настолько большим, чтобы $R > R_0$ и особые точки z_1, z_2, \dots, z_n попали внутрь контура L . По теореме (6.1)

$$\oint_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k).$$

С другой стороны, по свойству аддитивности интеграла

$$\oint_{L^+} f(z) dz = \int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{L_R} f(z) dz.$$

Сравнивая эти два равенства и учитывая, что $z = x$ на отрезке $[-R, R]$, получим

$$\int_{-R}^{+R} f(x) dx + \int_{L_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k). \quad (6.4)$$

На полуокружности L_R по условию теоремы $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}} = \frac{M}{R^{1+\delta}}$, а по свойству

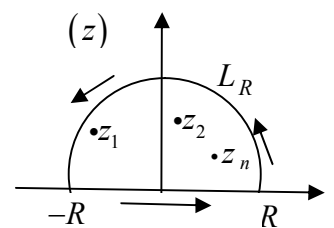


Рис. 29

об оценке интеграла $\left| \int_{L_R} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^{1+\delta}} \cdot \pi R = \frac{M}{R^\delta} \cdot \pi \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ и $\delta > 0$.

Поэтому равенство (6.4) в пределе при $R \rightarrow \infty$ примет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k).$$

Следствие. Пусть функция $f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов, $n - k > 1$ и z_1, z_2, \dots, z_N есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} f(z_k).$$

Доказательство. Запишем функцию $f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ в виде

$$f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{z^k (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k})}{z^n (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})} = \frac{1}{z^{n-k}} \cdot \varphi(z),$$

$$\text{где } \varphi(z) = \frac{(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k})}{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})}.$$

Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \frac{a_0}{b_0}$, то $|\varphi(z)| \leq M$ при условии, что $|z| \geq R_0$. Поэтому

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^{n-k}} \cdot |\varphi(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \text{ где } \delta = n - k - 1 > 0$$

и можно применить теорему 6.2.

Пример 6.4. Вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$.

Решение. Так как подынтегральная функция является четной, то

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

Функция $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$ есть отношение двух многочленов, в верхней полуплос-

кости имеет одну особую точку $z = i$, поэтому по следствию к теореме 6.2

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)^3}.$$

Для функции $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$ точка $z = i$ является полюсом третьего по-

рядка. Поэтому для вычисления вычета воспользуемся формулой (5.8):

$$I = \pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^3} = \pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} \cdot (z-i)^3 \right]'' = \frac{\pi i}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5} \right] = \frac{6\pi i}{(2i)^5} = \frac{3\pi}{16}.$$

6.3. Применение вычетов к вычислению интегралов

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx$$

Отметим, что $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$. Поэтому

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx = I_2 + i I_3 \Rightarrow$$

$$I_2 = \operatorname{Re} I_1, \quad I_3 = \operatorname{Im} I_1.$$

Следовательно, достаточно разобраться с вычислением интеграла $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx$.

Для этого воспользуемся следующим результатом (доказательство опустим).

Лемма Жордана. Пусть на полуокружности $\gamma_R: \begin{cases} |z - i y_0| = R, \\ \operatorname{Im} z \geq y_0 \end{cases}$ функция $f(z)$ аналитична и $|f(z)| \leq \varepsilon(R)$, где $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Тогда

$$\int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty \text{ и } a > 0.$$

Замечание

Приведенную формулировку леммы Жордана можно распространить еще на несколько случаев. Итак, лемма Жордана справедлива, если в ней

- 1) $a > 0$, $\gamma_R: \begin{cases} |z - i y_0| = R, \\ \operatorname{Im} z \geq y_0, \end{cases}$
- 2) $a < 0$, $\gamma_R: \begin{cases} |z - i y_0| = R, \\ \operatorname{Im} z \leq y_0, \end{cases}$
- 3) $a = i\alpha$ ($\alpha > 0$), $\gamma_R: \begin{cases} |z - x_0| = R, \\ \operatorname{Re} z \geq x_0, \end{cases}$
- 4) $a = i\alpha$ ($\alpha < 0$), $\gamma_R: \begin{cases} |z - x_0| = R, \\ \operatorname{Re} z \leq x_0. \end{cases}$

Применим лемму Жордана к вычислению интеграла $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx$.

Теорема 6.3. Пусть 1) функция $f(x)$ совпадает с $f(z)$ и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$,
2) функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_n ,

3) $|f(z)| \leq \varepsilon(R)$ на полуокружности $\gamma_R: \begin{cases} |z| = R, \\ \operatorname{Im} z \geq 0, \end{cases}$ причем $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx$ можно вычислить по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{iaz}], \text{ где } \operatorname{Im} z_k > 0, \quad a > 0. \quad (6.5)$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур γ , состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности γ_R (рис. 30).

Выберем R настолько большим, чтобы особые точки z_1, z_2, \dots, z_n попали внутрь контура γ . По теореме (6.1)

$$\oint_{\gamma^+} f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{iaz}].$$

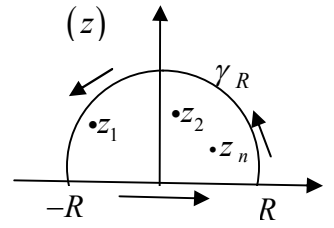


Рис. 30

С другой стороны, по свойству аддитивности интеграла

$$\oint_{\gamma^+} f(z) e^{iaz} dz = \int_{[-R, R]} f(z) e^{iaz} dz + \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz.$$

Сравнивая эти два равенства и учитывая, что $z = x$ на отрезке $[-R, R]$, получим

$$\int_{-R}^{+R} f(x) e^{iax} dx + \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{iaz}]. \quad (6.6)$$

На полуокружности γ_R по условию теоремы функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана при $y_0 = 0$, поэтому из леммы Жордана следует, что

$$\int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty \text{ и } a > 0.$$

Тогда равенство (6.6) в пределе при $R \rightarrow \infty$ примет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{iaz}].$$

Следствие. Пусть функция $f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов, где $k < n$

и z_1, z_2, \dots, z_N есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{iaz}], \quad a > 0.$$

Доказательство. Запишем функцию $f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ в виде

$$f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{z^k (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k})}{z^n (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})} = \frac{1}{z^{n-k}} \cdot \varphi(z),$$

$$\text{где } \varphi(z) = \frac{(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k})}{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})}.$$

Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \frac{a_0}{b_0}$, то $|\varphi(z)| \leq M$ при условии, что $|z| \geq R$. Поэтому

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^{n-k}} \cdot |\varphi(z)| \leq \frac{M}{R^{n-k}} = \varepsilon(R).$$

Так как $n - k > 0$, то $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, и можно применить теорему 6.3:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{iaz}].$$

Пример 6.5. Вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{x^2 + b^2}$ ($a > 0, b > 0$).

Решение. Так как подынтегральная функция является четной, то

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2}.$$

Функция $f(z) = \frac{1}{z^2 + b^2}$ есть правильная дробь, у которой знаменатель в верхней полуплоскости имеет один ноль $z = bi$, поэтому по следствию к теореме 6.3 имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}.$$

Вычет в точке $z = bi$ для функции вида $\frac{\varphi(z)}{g(z)}$ в случае, когда $\varphi(z_0) \neq 0, g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$,

можно вычислить по формуле (5.7), т.е. $\operatorname{Res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)'} \right|_{z=bi} = \frac{e^{-ab}}{2bi}.$

Окончательно, получим

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{Res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} \right) = \operatorname{Re} \left(\pi i \frac{e^{-ab}}{2bi} \right) = \frac{\pi}{2b} e^{-ab}.$$

Заметим, что здесь неприменима теорема 6.2 для функции $f(z) = \frac{\cos az}{z^2 + b^2}$, т.к. $|\cos z|$ быстро возрастает для $|z| \geq R_0$ и функция $f(z)$ не удовлетворяет условию (6.2).

7. Операционное исчисление

Одним из важных приложений теории функций комплексного переменного является операционное исчисление. В физике, механике, электротехнике, радиотехнике методы операционного исчисления используются при решении многих прикладных задач.

7.1. Понятие оригинала и его изображения

Комплекснозначная функция $f(t) = u(t) + iv(t)$ вещественного аргумента t называется **оригиналом**, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) функция $f(t)$ кусочно непрерывна, т.е. на любом конечном интервале может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода;
- 2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- 3) $f(t)$ растет не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие числа $M > 0$ и $s \geq 0$, при которых

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{st}. \quad (7.1)$$

Точную нижнюю грань s_0 тех значений s , для которых справедливо неравенство (7.1), называют **показателем роста** оригинала $f(t)$.

Пример 7.1. Функция Хевисайда $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ (рис.31) является ори-

гиналом с показателем роста $s_0 = 0$, так как $\eta(t) \leq 1 = e^{0 \cdot t}$.

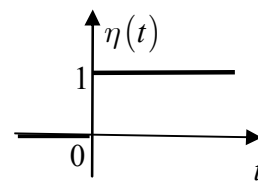


Рис. 31

Замечание. Пусть некоторая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3 определения оригинала, но не удовлетворяет условию 2, т.е. функция $\varphi(t) \neq 0$ для $t < 0$. Умножив эту функцию на $\eta(t)$, мы "зануляем" функцию $\varphi(t)$ для $t < 0$ и не изменяем ее для $t \geq 0$. Тогда произведение $\varphi(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varphi(t), & t \geq 0 \end{cases}$ будет оригиналом. В дальнейшем иногда для сокращения записи будем писать $\varphi(t)$ вместо $\varphi(t) \cdot \eta(t)$.

Пример 7.2. Функции $f(t) = \frac{1}{t} \eta(t)$, $g(t) = e^{t^2} \eta(t)$ не являются оригиналами, т.к. первая функция в точке $t = 0$ имеет разрыв второго рода, вторая функция не удовлетворяет соотношению (7.1).

Пример 7.3. Показать, что функции $f(t) = e^{(a+bi)t} \cdot \eta(t)$, $g(t) = t^a \cdot \eta(t)$ ($a > 0$) являются оригиналами и найти их показатели роста.

Решение. Функция $f(t)$ непрерывна всюду, кроме точки $t = 0$; $f(t) = 0$ при $t < 0$ и

$$|f(t)| \leq \left| e^{(a+bi)t} \right| = \left| e^{at} \cdot e^{bit} \right| = e^{at} \cdot \underbrace{\left| e^{bit} \right|}_{=1} = e^{at}.$$

Поэтому функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = a$, если $a > 0$, и с показателем роста $s_0 = 0$, если $a \leq 0$.

Функция $g(t)$ непрерывна всюду, $g(t) = 0$ при $t < 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^a}{e^{\varepsilon t}} = 0 \Rightarrow |g(t)| \leq |t^a| \leq M \cdot e^{\varepsilon t}, \quad s_0 = \inf \{ \varepsilon : \varepsilon > 0 \} = 0.$$

Поэтому функция $g(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = 0$.

Свойства оригиналов

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_1 , $g(t)$ есть оригинал с показателем роста s_2 . Тогда

- 1) $f_1(t) = f(t) + g(t)$ есть оригинал с показателем роста $s = \max \{s_1, s_2\}$,
- 2) $f_2(t) = f(at)$ ($a > 0$) есть оригинал с показателем роста as_1 ,
- 3) $f_3(t) = f(t - \tau) \cdot \eta(t - \tau)$ ($\tau > 0$) есть оригинал с показателем роста s_1 ,
- 4) $f_4(t) = t^\alpha f(t)$ ($\alpha > 0$) есть оригинал с показателем роста s_1 ,
- 5) $f_5(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ есть оригинал с показателем роста s_1 .

Действительно, функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), f_5(t)$ кусочно непрерывны и равны нулю при $t < 0$, т.е. удовлетворяют первому и второму условиям определения оригинала. Проверим выполнение для них третьего условия:

$$|f_1(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq M_1 e^{s_1 t} + M_2 e^{s_2 t} \leq M_1 e^{s t} + M_2 e^{s t} \leq M e^{s t},$$

где $M = M_1 + M_2$, $s = \max\{s_1, s_2\}$,

$$|f_2(t)| = |f(at)| \leq M e^{s_1(at)} = M e^{(s_1 a)t} \quad (a > 0),$$

$$|f_3(t)| = |f(t-\tau) \cdot \eta(t-\tau)| \leq |f(t-\tau)| \leq M \cdot e^{s_1(t-\tau)} \leq M \cdot e^{s_1 t},$$

$$|f_4(t)| \leq t^\alpha |f(t)| \leq e^{\varepsilon t} \cdot M e^{s_1 t} = M e^{(s_1 + \varepsilon)t}, \quad s = \inf\{s_1 + \varepsilon\} = s_1,$$

$$|f_5(t)| = \left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq M \int_0^t e^{s_1 \tau} d\tau \leq M e^{s_1 t} \int_0^t d\tau = M e^{s_1 t} t \leq M e^{(s_1 + \varepsilon)t}.$$

Перейдем к понятию изображения.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$, связанная с оригиналом $f(t)$ равенством:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (7.2)$$

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение для $f(t)$, будем символически записывать так: $f(t) \div F(p)$ или $F(p) \div f(t)$. Несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (7.2), часто называют интегралом Лапласа для функции $f(t)$. Переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют преобразованием Лапласа. Теорию преобразования Лапласа называют операционным исчислением. В дальнейшем мы увидим, что смысл операционного метода заключается в том, что с помощью введения изображений удастся упростить решение многих задач.

Теорема 7.1. (о существовании и аналитичности изображения)

Пусть оригинал $f(t)$ имеет показатель роста s_0 . Тогда

- 1) в области $\operatorname{Re} p > s_0$ изображение $F(p)$ существует, т.е. интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ сходится,
- 2) в области $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ ($\alpha > s_0$) интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ сходится равномерно,
- 3) изображение $F(p)$ является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > s_0$.

Доказательство.

1). Пусть $p = s + i\sigma$. Учитывая, что $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$, получим:

$$|f(t) e^{-pt}| = |f(t)| \cdot |e^{-st - i\sigma t}| \leq (M e^{s_0 t}) \cdot |e^{-st}| \cdot \underbrace{|e^{-i\sigma t}|}_{=1} = (M e^{s_0 t}) e^{-st} = M e^{(s_0 - s)t},$$

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{(s_0-s)t} dt = M \left. \frac{e^{(s_0-s)t}}{s_0-s} \right|_{t=0}^{t=+\infty}.$$

Тогда в области $s = \operatorname{Re} p > s_0$ (рис. 32) будем иметь:

$$s_0 - s < 0, \quad e^{(s_0-s)t} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty,$$

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq M \left. \frac{e^{(s_0-s)t}}{s_0-s} \right|_{t=0}^{t=+\infty} = M \left(0 - \frac{1}{s_0-s} \right) = \frac{M}{s-s_0}, \quad (7.3)$$

т.е. интеграл $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ сходится.

2). В области $s = \operatorname{Re} p \geq \alpha$ ($\alpha > s_0$) будем иметь: $s_0 - s \leq s_0 - \alpha < 0$,

$$|f(t)e^{-pt}| \leq M e^{(s_0-s)t} \leq M e^{(s_0-\alpha)t},$$

функция $e^{(s_0-\alpha)t}$ не зависит от p и интеграл $\int_0^{+\infty} e^{(s_0-\alpha)t} dt = \frac{1}{s_0-\alpha}$

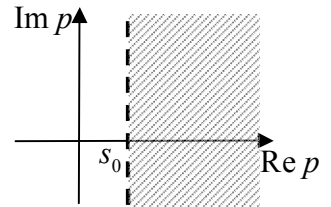


Рис.32

сходится. Поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ сходится равномерно в области $\operatorname{Re} p \geq \alpha$.

3). Пусть γ – произвольный замкнутый контур в области $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$\oint_{\gamma} F(p) dp = \oint_{\gamma} dp \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt \oint_{\gamma} e^{-pt} dp.$$

Здесь мы поменяли порядок интегрирования. Так как функция e^{-pt} является аналитической, то $\oint_{\gamma} e^{-pt} dp = 0$ и поэтому $\oint_{\gamma} F(p) dp = 0$. Кроме того, можно пока-

зать, что функция $F(p)$ является непрерывной (обоснование этого опустим). Тогда из теоремы Морера (п. 3.3), обратной к теореме Коши, следует, что функция $F(p)$ является аналитической.

Следствие. Пусть оригинал $f(t)$ имеет показатель роста s_0 и $f(t) \div F(p)$. Тогда

$$1) |F(p)| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} p - s_0} \quad (\operatorname{Re} p > s_0), \quad 2) \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$$

Действительно, первое утверждение следует из соотношения (7.3), а второе утверждение следует из первого.

Пример 7.4. Найти изображение функции Хэвисайда $\eta(t)$.

Решение. Порядок роста функции $\eta(t)$ равен $s_0 = 0$ и, следовательно, изображение существует, когда $\operatorname{Re} p > 0$. По определению

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\eta(t)}_{=1} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{-p} \left(\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ =0}} e^{-pt} - e^0 \right) = \frac{1}{p}.$$

Поясним равенство $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0$. Если $p = s + i\sigma$, то $e^{-pt} = e^{-(s+i\sigma)t} = e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t}$. Функция e^{-st} является бесконечно малой при $t \rightarrow +\infty$, так как $s = \operatorname{Re} p > 0$. Функция $e^{-i\sigma t}$ является ограниченной, так как

$$|e^{-i\sigma t}| = \sqrt{\cos^2(-\sigma t) + \sin^2(-\sigma t)} = 1.$$

Поэтому функция e^{-pt} , как произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, является бесконечно малой при $t \rightarrow +\infty$, т.е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0$.

Итак, мы получили:

$$\eta(t) \div \frac{1}{p} \text{ или } 1 \div \frac{1}{p}.$$

Во второй формуле мы по договоренности опустили множитель $\eta(t)$.

Пример 7.5. Найти изображение функции $e^{qt} \cdot \eta(t)$.

Решение. Функция $e^{qt} \cdot \eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = \operatorname{Re} q$ (пример 7.3). Поэтому ее изображение $F(p)$ определено в области $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q$. Найдем это изображение:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{qt} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(q-p)t} dt = \left. \frac{e^{(q-p)t}}{(q-p)} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-q}.$$

Здесь, также как в предыдущем примере, можно показать, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(q-p)t} = 0$, так как $\operatorname{Re}(q-p) < 0$. Итак,

$$e^{qt} \cdot \eta(t) \div \frac{1}{p-q} \text{ или } e^{qt} \div \frac{1}{p-q} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q).$$

Для перехода от оригинала к изображению (и для обратного перехода) надо знать свойства изображения.

7.2. Свойства изображений

1. Линейность

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_1 , $g(t)$ есть оригинал с показателем роста s_2 , $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$. Тогда

$$\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t) \div \lambda \cdot F(p) + \mu \cdot G(p),$$

где λ, μ — любые постоянные, $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$.

Действительно, по свойству оригиналов функция $\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)$ есть оригинал с показателем роста $s = \max\{s_1, s_2\}$, поэтому в области $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$ изображение оригинала $\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)$ существует. Вычислим его:

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \div \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-pt} dt = \lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \mu \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt = \lambda F(p) + \mu G(p).$$

Используя это свойство, можно показать, что

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha t \div \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}, & \cos \alpha t \div \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \alpha|) \\ \operatorname{sh} \alpha t \div \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}, & \operatorname{ch} \alpha t \div \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \alpha|). \end{array}$$

(по договоренности опускаем множитель $\eta(t)$).

Действительно, по формуле Эйлера $\sin \alpha t = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})$.

Используя свойство линейности и пример 7.5, получим

$$\sin \alpha t \div \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\alpha} - \frac{1}{p+i\alpha} \right) = \frac{1}{2i} \frac{(p+i\alpha) - (p-i\alpha)}{p-i^2\alpha^2} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\alpha) = |\operatorname{Im} \alpha|.$$

Аналогично, например,

$$\operatorname{ch} \alpha t = \frac{1}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha} \right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm \alpha) = |\operatorname{Re} \alpha|.$$

2. Свойство подобия

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 и $f(t) \div F(p)$. Тогда

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F(\lambda p), \quad \lambda > 0, \quad \operatorname{Re} p > \lambda s_0.$$

Действительно, $f(\lambda t) \div \int_0^{+\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt = \left| \frac{\lambda t = \tau}{\lambda dt = d\tau} \right| = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda} \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, причем, так как $f(\lambda t)$ есть оригинал с показателем роста λs_0 , то его изображение существует в области $\operatorname{Re} p > \lambda s_0$.

3. Дифференцирование оригинала

Пусть $f^{(n)}(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 . Тогда $f^{(n-1)}(t), f^{(n-2)}(t), \dots, f'(t), f(t)$ есть оригиналы с показателями роста s_0 , причем, если $f(t) \div F(p)$, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\div pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\div p^2 F(p) - p f(0) - f'(0), \dots, \\ f^{(n)}(t) &\div p^n F(p) - p^{n-1} f'(0) - p^{n-2} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \end{aligned}$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ ($k=1, 2, 3, \dots$) и $\operatorname{Re} p > s_0$.

Действительно, если $f^{(n)}(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 , то из свойств

оригиналов следует, что $\int_0^t f^{(n)}(\tau) d\tau = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$, а следовательно и $f^{(n-1)}(t)$,

есть оригинал с показателем роста s_0 . Аналогично, $f^{(n-2)}(t) = \int_0^t f^{(n-1)}(\tau) d\tau + f^{(n-1)}(0)$

является оригиналом с показателем роста s_0 и т.д.

Найдем изображение оригинала $f'(t)$. Для этого воспользуемся определением изображения и методом интегрирования по частям:

$$f'(t) \div \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt} \\ dv = f'(t) dt \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = -p e^{-pt} dt \\ v = \int f'(t) dt = f(t) \end{array} \right| = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Оценим функцию $f(t) e^{-pt}$, где $p = s + i\sigma$. Так как $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$ и $|e^{-i\sigma t}| = 1$, то

$$\left| f(t) e^{-pt} \right| \leq M \cdot e^{s_0 t} \left| e^{-st} \right| \cdot \left| e^{-i\sigma t} \right| = M \cdot e^{s_0 t} \cdot e^{-st} = M \cdot e^{-(s-s_0)t}.$$

Предел этой функции при $t \rightarrow +\infty$ равен нулю, так как $s = \operatorname{Re} p > s_0$. Поэтому $f'(t) \div 0 - f(0) + pF(p) = pF(p) - f(0)$. Пользуясь полученным изображением производной и учитывая, что $f''(t) = (f'(t))'$, находим

$$f''(t) \div p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - p f(0) - f'(0) \text{ и т.д.}$$

Пример 7.6. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. Продифференцируем это равенство:

$$f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t.$$

Перейдем к изображениям:

$$pF(p) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \frac{2}{p^2 + 2^2} \Rightarrow F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

4. Интегрирование оригинала

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 , $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

Таким образом, при интегрировании оригинала его изображение делится на p .

Действительно, рассмотрим функцию $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ и ее изображение $G(p)$. Известно, что $g'(t) = f(t)$. Перейдем в этом равенстве к изображениям, учитывая свойство 3:

$$pG(p) - g(0) = F(p), \quad g(0) = \int_0^0 f(\tau) d\tau = 0 \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 7.7. Доказать, что $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Решение. Применим n раз свойство 4, учитывая, что $1 \div \frac{1}{p}$. Тогда получим:

$$t = \int_0^t 1 \cdot d\tau \div \frac{1/p}{p} = \frac{1}{p^2}, \quad t^2 = \int_0^t \tau d\tau \div \frac{1/p^2}{p} = \frac{1}{p^3}, \quad t^3 = \int_0^t \tau^2 d\tau \div \frac{1/p^3}{p} = \frac{1}{p^4}, \dots, \quad t^n \div \frac{1}{p^{n+1}} \Rightarrow t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

5. Дифференцирование изображения

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 , $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$F'(p) \div (-t) f(t), \quad F''(p) \div (-t)^2 f(t), \dots, \quad F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t).$$

т.е. при дифференцировании изображения его оригинал умножается на $(-t)$.

Действительно, функция $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической и ее можно дифференцировать по p , причем, в силу равномерной сходимости интеграла, дифференцирование по p можно провести под знаком интеграла:

$$F'(p) = \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^{+\infty} [f(t) e^{-pt}]'_p dt = \int_0^{+\infty} [(-t) f(t)] e^{-pt} dt \div (-t) f(t),$$

$$F''(p) = (F'(p))' = \int_0^{+\infty} [(-t) f(t) e^{-pt}]'_p dt = \int_0^{+\infty} [(-t)^2 f(t)] e^{-pt} dt \div (-t)^2 f(t) \dots$$

Пример 7.8. Найти изображение оригиналов $t \cdot \sin \alpha t$, $t \cdot \cos \alpha t$.

Решение. Учтем, что $\sin \alpha t \div \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$, $\cos \alpha t \div \frac{p}{p^2 + \alpha^2}$. Умножим оригиналы на $(-t)$.

При этом их изображения нужно продифференцировать по p , т.е.

$$\begin{aligned} (-t) \cdot \sin \alpha t \div \frac{d}{dp} \left(\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right) &= \frac{-2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}, \\ (-t) \cdot \cos \alpha t \div \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right) &= -\frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $t \cdot \sin \alpha t \div \frac{2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}$, $t \cdot \cos \alpha t \div \frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}$.

6. Интегрирование изображения

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 , $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$\int_p^{+\infty} F(p) dp \div \frac{f(t)}{t}$$

при условии, что 1) $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, 2) $\int_p^\infty F(p) dp = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} \int_p^q F(p) dp$, при-

чем путь интегрирования лежит в области $\operatorname{Re} p > s_0$.

Действительно, рассмотрим функцию $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ и ее изображение $G(p)$.

Учитывая свойство 5, получим:

$$G'(p) \div (-t) g(t) = (-t) \frac{f(t)}{t} = -f(t).$$

С другой стороны,

$$-F(p) \div -f(t).$$

Сравнивая эти два равенства, получим: $F(p) = -G'(p)$.

Проинтегрируем это равенство, выбирая путь интегрирования в области $\operatorname{Re} p > s_0$, где изображение существует и аналитично:

$$\int_p^\infty F(p) dp = - \int_p^\infty G'(p) dp = - \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} \int_p^q G'(p) dp = - \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} [G(q) - G(p)] = G(p).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} G(q) = 0$ из следствия к теореме 7.1.

Пример 7.9. Найти изображение интегрального синуса $\operatorname{si}(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$.

Решение. Так как $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то из свойства 6, а затем из свойства 4 следует:

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{1}{p^2+1} dp = \arctg p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p, \quad \text{si}(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \div \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg p \right).$$

7. Запаздывание оригинала

Пусть $f(t)\eta(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 и $f(t)\eta(t) \div F(p)$, $\text{Re } p > s_0$. Тогда при запаздывании оригинала на время α (рис. 33) его изображение умножается на $e^{-p\alpha}$, т.е.

$$f(t-\alpha)\eta(t-\alpha) \div F(p)e^{-p\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Действительно, используя определение изображения и учитывая, что $\eta(t-\alpha) = 0$ при $t < \alpha$, имеем:

$$f(t-\alpha)\eta(t-\alpha) \div \int_0^{+\infty} f(t-\alpha) \cdot \eta(t-\alpha) \cdot e^{-pt} dt = \int_\alpha^{+\infty} f(t-\alpha) \cdot e^{-pt} dt.$$

Сделав в интеграле замену $t-\alpha = \tau$, $dt = d\tau$, получим

$$f(t-\alpha) \cdot \eta(t-\alpha) \div \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-p(\tau+\alpha)} d\tau = e^{-p\alpha} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau = e^{-p\alpha} F(p).$$

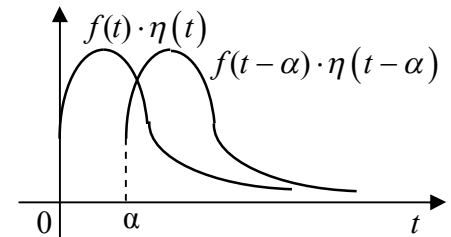


Рис.33

Следствие (о единичной функции отрезка)

Единичная функция $\eta_{[a,b]}(t)$ отрезка $[a,b]$, равная единице на отрезке $[a,b]$ и нулю вне этого отрезка (рис.34), представима в виде

$$\eta_{[a,b]}(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b) \quad (7.3)$$

и имеет изображение $\eta_{[a,b]}(t) \div \frac{1}{p} e^{-pa} - \frac{1}{p} e^{-pb}$.

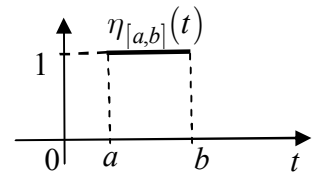


Рис.34

Действительно, рассмотрим функции $\eta(t-a)$, $\eta(t-b)$ (рис.35). На интервалах $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$ их значения совпадают, а разность равна нулю. На отрезке $[a,b]$ их разность равна 1. Следовательно,

$$\eta_{[a,b]}(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b).$$

Этот оригинал часто используется в приложениях.

Найдем его изображение, используя соотношение $\eta(t) \div \frac{1}{p}$ и свой-

ство запаздывания оригинала: $\eta_{[a,b]}(t) \div \frac{1}{p} e^{-pa} - \frac{1}{p} e^{-pb}$.

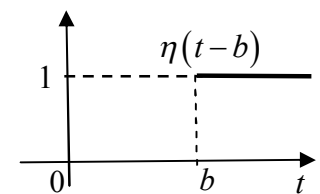
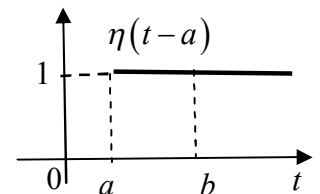


Рис.35

Пример 7.10. Найти изображение треугольного импульса (рис. 36).

Решение. Исходная функция $f(t)$ равна сумме двух вспомогательных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (рис. 37 и 38). Функция $f_1(t)$ равна t на отрезке $[0,2]$ и нулю вне этого отрезка т.е. $f_1(t) = t \cdot \eta_{[0,2]}(t)$. Функция $f_2(t)$ равна $4-t$ на отрезке $[2,4]$ и нулю вне этого отрезка, т.е. $f_2(t) = (4-t) \cdot \eta_{[2,4]}(t)$. Таким образом,

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = t \cdot \eta_{[0,2]}(t) + (4-t) \cdot \eta_{[2,4]}(t).$$

Воспользуемся соотношением (7.3):

$$\begin{aligned} f(t) &= t \cdot [\eta(t) - \eta(t-2)] + (4-t) \cdot [\eta(t-2) - \eta(t-4)] = \\ &= t \cdot \eta(t) - 2(t-2) \cdot \eta(t-2) + (t-4) \cdot \eta(t-4). \end{aligned}$$

Оригинал $t \cdot \eta(t)$ имеет изображение $\frac{1}{p^2}$. Для оригиналов, западывающих соответственно на 2 и 4, это изображение надо умножить на e^{-2p} и e^{-4p} . Поэтому $f(t) \div \frac{1}{p^2} - 2 \cdot \frac{1}{p^2} \cdot e^{-2p} + \frac{1}{p^2} \cdot e^{-4p}$.

8. Смещение изображения

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 , $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$F(p-\alpha) \div f(t) e^{\alpha t}, \quad \operatorname{Re}(p-\alpha) > s_0.$$

Таким образом, при смещении изображения на α , оригинал умножается на $e^{\alpha t}$. Действительно,

$$f(t) \cdot e^{\alpha t} \div \int_0^{+\infty} [f(t) \cdot e^{\alpha t}] \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p-\alpha)$$

и интеграл сходится, если $\operatorname{Re}(p-\alpha) > s_0$.

Пример 7.11. Найти изображение оригинала $t^n e^{\alpha t}$.

Решение. Применяя свойство 8 к известному уже соотношению $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$, получим

$$t^n e^{\alpha t} \div \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

9. Изображение периодического оригинала

Пусть оригинал $f(t)$ с показателем роста s_0 имеет период T , $f(t) \div F(p)$. Тогда

$$f(t) \div \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

Действительно, $f(t) \div F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt + \int_T^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = I_1 + I_2$.

Сделав во втором интеграле I_2 замену $t = \tau + T$, $dt = d\tau$, получим

$$I_2 = \int_T^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(\tau+T)}_{=f(\tau)} \cdot e^{-p(\tau+T)} d\tau = e^{-pT} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau = e^{-pT} F(p) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F(p) &= I_1 + I_2 = \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt + e^{-pT} F(p) \Rightarrow F(p)(1 - e^{-pT}) = \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt \Rightarrow \\ F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Пример 7.12. Найти изображение периодического с периодом T прямоугольного импульса $f(t)$ величины A и продолжительности $T/2$ (рис. 39).

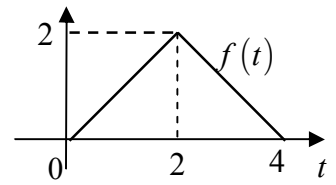


Рис.36

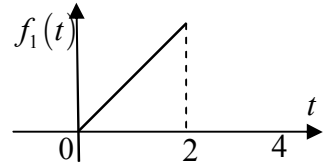


Рис. 37

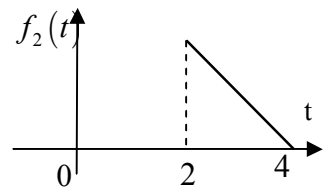


Рис. 38

Решение. Применяя свойство 9, получим:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^{T/2} A \cdot e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{1-e^{-pT}} A \cdot \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_{t=0}^{t=T/2} = \frac{A}{p} \cdot \frac{1-e^{-pT/2}}{1-e^{-pT}} = \frac{A}{p(1+e^{-pT/2})}. \end{aligned}$$

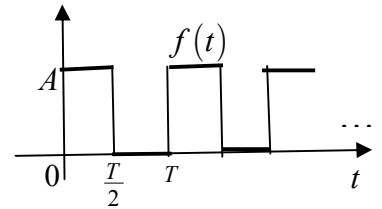


Рис.39

10. Свертка функций и ее изображение

Сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau.$$

Отметим следующие свойства свертки.

1). Свертка симметрична, т.е. $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

Действительно,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau = \int_{d\tau=-dq}^{t-\tau=q} f(t-q) \cdot g(q) dq = \int_0^t g(q) \cdot f(t-q) dq = g(t) * f(t).$$

2). Свертка оригиналов является оригиналом.

Действительно,

а) при $t < 0$ имеем: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau = 0$, т.к. $f(\tau) = 0$ при $\tau < t < 0$,

б) свертка кусочно непрерывных функций является кусочно непрерывной функцией,

в) если $f(t)$, $g(t)$ есть оригиналы с показателями роста s_1, s_2 , то

$$\begin{aligned} |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)| &\leq M_1 e^{s_1 \tau} \cdot M_2 e^{s_2(t-\tau)} \leq \underbrace{M_1 M_2}_{=M} e^{s\tau} e^{s(t-\tau)} = M e^{st}, \quad s = \max\{s_1, s_2\} \Rightarrow \\ |f(t) * g(t)| &= \left| \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)| d\tau \leq M \int_0^t e^{st} d\tau \leq M e^{st} t \leq M e^{st} e^{\varepsilon t} = M e^{(s+\varepsilon)t}, \end{aligned}$$

т.е. свертка оригиналов является оригиналом с показателем роста $s = \max\{s_1, s_2\}$.

3). Изображением свертки функций является произведение их изображений;

более точно, если $f(t) \div F(p)$ ($\operatorname{Re} p > s_1$), $g(t) \div G(p)$ ($\operatorname{Re} p > s_2$), то

$$f(t) * g(t) \div F(p) \cdot G(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}.$$

Действительно,

$$f(t) * g(t) \div \int_0^{+\infty} [f(t) * g(t)] \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \right] \cdot \underbrace{e^{-p\tau} e^{-p(t-\tau)}}_{=e^{-pt}} dt.$$

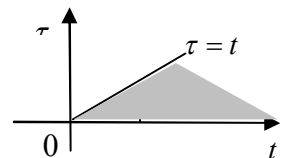


Рис.40

Имеем двойной интеграл по области D : $\begin{cases} 0 \leq \tau \leq t, \\ 0 \leq t < \infty \end{cases}$ (рис. 40).

Поменяем в двойном интеграле порядок интегрирования, затем во внутреннем интеграле сделаем замену $t-\tau = \eta$, $dt = d\eta$:

$$f(t) * g(t) \div \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau \left[\int_{\tau}^{+\infty} g(t-\tau) \cdot e^{-p(t-\tau)} dt \right] = \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau \left[\int_0^{+\infty} g(\eta) \cdot e^{-p\eta} d\eta \right] = F(p) \cdot G(p).$$

Пример 7.13. Найти изображение функции $\varphi(t) = \int_0^t \tau \cdot \sin(t-\tau) d\tau$.

Решение. Данную функцию можно записать в виде свертки $\varphi(t) = t * \sin t$. Так как $t \div \frac{1}{p^2}$, $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то изображением свертки данных функций является произведение их изображений, т.е. $\varphi(t) = t * \sin t \div \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p^2+1}$.

Пример 1.4. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$.

Решение. Имеем $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1}$, где $\frac{1}{p^2+1} \div \sin t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \div \sin t * \sin t &= \int_0^t \sin \tau \cdot \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(2\tau-t) - \cos t] d\tau = \\ &= \left(\frac{1}{4} \sin(2\tau-t) - \frac{1}{2} \tau \cos t \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin(-t) - \frac{t \cos t}{2} = \frac{\sin t - t \cos t}{2}. \end{aligned}$$

11). Формула Дюамеля

Пусть $f(t) \div F(p)$ ($\operatorname{Re} p > s_1$), $g(t) \div G(p)$ ($\operatorname{Re} p > s_2$). Тогда

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \div f(t) * g'(t) + f(t) g(0), \quad \operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}.$$

Действительно,

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) = [p \cdot G(p) - g(0)] \cdot F(p) + g(0) \cdot F(p) \div f(t) * g'(t) + f(t) g(0).$$

Все основные правила и формулы операционного исчисления, рассмотренные выше, удобно свести в следующую таблицу.

№	оригинал	изображение
1	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(p) + \mu G(p)$
2	$f'(t)$	$p F(p) - f(0)$
3	$f''(t)$	$p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$
4	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$
5	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$

№	оригинал	изображение
12	1	$\frac{1}{p}$
13	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
14	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
15	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
16	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$

6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(p) dp$
7	$f(t-\alpha) \cdot \eta(t-\alpha)$	$F(p) \cdot e^{-\alpha p}$
8	$f(t) \cdot e^{\alpha t}$	$F(p-\alpha)$
9	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$	$F(p) \cdot G(p)$
10	$f(t) * g'(t) + f(t) \cdot g(0)$	$p \cdot F(p) \cdot G(p)$
11	$f(t)$ с периодом T	$\frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt$

17	$\operatorname{sh} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
18	$\operatorname{ch} \alpha t$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
19	$t \cdot \sin \alpha t$	$\frac{2 p \alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
20	$t \cdot \cos \alpha t$	$\frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
21	$t \cdot \operatorname{sh} \alpha t$	$\frac{2 p \alpha}{(p^2 - \alpha^2)^2}$
22	$t \cdot \operatorname{ch} \alpha t$	$\frac{p^2 + \alpha^2}{(p^2 - \alpha^2)^2}$

Более подробные таблицы приведены, например, в [2], [6], [7].

7.3. Восстановление оригинала по его изображению

При решении задач с использованием преобразования Лапласа сначала переходят от уравнения для оригинала к более простому уравнению для его изображения, из которого находят изображение. Затем по этому изображению восстанавливают оригинал. Рассмотрим различные способы восстановления оригинала.

Сведение изображения к табличным изображениям

а) представить изображение в виде суммы табличных изображений (например, разложив дробь на простейшие дроби),

б) представить изображение в виде произведения табличных изображений

$$F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p) \Rightarrow f(t) = f_1(t) * f_2(t), \quad (7.4)$$

$$F(p) = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \Rightarrow f(t) = f_1(t) * f_2'(t) + f_1(t) \cdot f_2(0), \quad (7.5)$$

в) использовать свойства запаздывания оригинала и смещения изображения

$$F(p) \div f(t) \Rightarrow F(p) \cdot e^{-\alpha p} \div f(t-\alpha) \cdot \eta(t-\alpha), \quad (7.6)$$

$$F(p) \div f(t) \Rightarrow F(p-\alpha) \div f(t) \cdot e^{\alpha t}, \quad (7.7)$$

г) использовать изображение периодического оригинала с периодом T , т.е. если

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (7.8)$$

то по изображению $G(p)$ восстановить оригинал $g(t)$ на отрезке $[0, T]$ и продолжить этот оригинал периодически.

Пример 7.15. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2} \cdot e^{-3p}$.

Решение. Воспользуемся табличным изображением $\frac{1}{p^2} \div t$ и формулами (7.7), (7.6):

$$\frac{1}{(p+1)^2} \div t e^{-t} \eta(t) \Rightarrow \frac{1}{(p+1)^2} e^{-3p} \div (t-3) e^{-(t-3)} \eta(t-3).$$

Пример 7.16. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{p^3 + 3p - 5}{(p+1)^2(p^2 + 2p + 10)}$.

Решение. Разложим дробь на простейшие дроби:

$$F(p) = \frac{p^3 + 3p - 5}{(p+1)^2(p^2 + 2p + 10)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 2p + 10} \Rightarrow$$

$$p^3 + 3p - 5 = A(p+1)(p^2 + 2p + 10) + B(p^2 + 2p + 10) + (Cp + D)(p+1)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} p = -1 & -9 = 9B \quad B = -1 \\ p^3 & 1 = A + C \\ p^2 & 0 = 3A + B + 2C + D \\ p = 0 & -5 = 10A + 10B + D \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B = -1 \\ A + C = 1 \\ A + D = -1 \\ 10A + D = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B = -1 \\ A = 2/3 \\ C = 1/3 \\ D = -5/3 \end{array} \Rightarrow$$

$$F(p) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p-5}{p^2 + 2p + 10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(p+1)-6}{(p+1)^2 + 9}.$$

Воспользуемся табличными изображениями и свойством (7.7):

$$\frac{1}{p+1} \div e^{-t}, \quad \frac{1}{p^2} \div t, \quad \frac{p}{p^2 + 9} \div \cos 3t, \quad \frac{3}{p^2 + 9} \div \sin 3t \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{2}{3} e^{-t} - t e^{-t} - \frac{1}{3} \cos 3t \cdot e^{-t} - \frac{2}{3} \sin 3t \cdot e^{-t}.$$

Пример 7.17. Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 - e^{-pT}}, \text{ где } G(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right) e^{-pT/2}.$$

Решение. Изображение имеет вид (7.8), поэтому искомый оригинал есть периодическая функция с периодом T , которая на отрезке $[0, T]$ совпадает с оригиналом $g(t)$ изображения $G(p)$. Оригиналу $g(t)$ найдем, используя свойство линейности,

соотношение (7.6) и табличные изображения $\frac{1}{p^2} \div t \cdot \eta(t)$, $\frac{1}{p} \div \eta(t)$:

$$g(t) = t \cdot \eta(t) - \left(\frac{T}{2} + \left(t - \frac{T}{2} \right) \right) \cdot \eta\left(t - \frac{T}{2}\right) = t \cdot \eta(t) - t \cdot \eta\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} t, & 0 < t < T/2, \\ 0, & t > T/2. \end{cases}$$

Искомый оригинал $f(t)$ получается при периодическом продолжении оригинала $g(t)$ с отрезка $[0, T]$ на положительную полуось t (рис. 41).

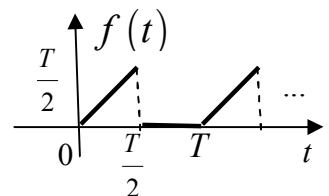


Рис. 41

Отыскание оригинала по формуле Меллина

Пусть $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > s_0$ является изображением оригинала $f(t)$ с показателем роста s_0 . Тогда в точках непрерывности функции $f(t)$ справедлива формула Меллина:

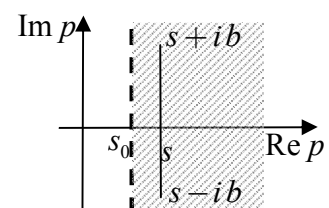


Рис. 42

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{s-ib}^{s+ib} F(p) e^{pt} dp,$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (рис. 42).

Доказательство формулы Меллина мы опустим. Отметим, что непосредственное применение формулы Меллина обычно затруднительно. Однако при некоторых дополнительных условиях интеграл Меллина может быть вычислен с помощью вычетов.

Отыскание оригинала с помощью вычетов

Теорема 7.2. Пусть

- 1) функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$ с показателем роста s_0 ,
- 2) функция $F(p)$ является аналитической в комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек p_1, p_2, \dots, p_n из области $\operatorname{Re} p \leq s_0$,
- 3) $|F(p)| \leq \varepsilon(R)$ на полуокружности $\gamma_R: \begin{cases} |p-s| = R, & (s > s_0) \text{ и } \varepsilon(R) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \\ \operatorname{Re} p \leq s, \end{cases}$

Тогда
$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} F(p) e^{pt}, \quad t > 0. \quad (7.9)$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур γ , состоящий из отрезка $[s-iR, s+iR]$ и полуокружности γ_R (рис. 43). Выберем R настолько большим, чтобы особые точки p_1, p_2, \dots, p_n попали внутрь контура γ . По теореме (6.1)

$$\oint_{\gamma^+} F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} [F(p) e^{pt}].$$

С другой стороны, по свойству аддитивности интеграла

$$\oint_{\gamma^+} F(p) e^{pt} dp = \int_{s-iR}^{s+iR} F(p) e^{pt} dp + \int_{\gamma_R} F(p) e^{pt} dp.$$

Сравнивая эти два равенства, получим:

$$\int_{s-iR}^{s+iR} F(p) e^{pt} dp + \int_{\gamma_R} F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} [F(p) e^{pt}]. \quad (7.10)$$

На полуокружности γ_R по условию теоремы функция $F(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, поэтому из леммы Жордана следует, что

$$\int_{\gamma_R} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad t > 0.$$

Тогда равенство (7.10) в пределе при $R \rightarrow \infty$ примет вид:

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} [F(p) e^{pt}].$$

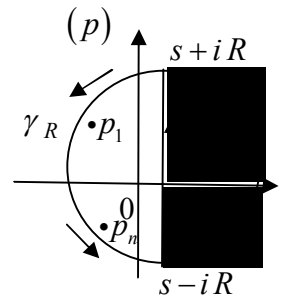


Рис. 43

Учитывая формулу Меллина, получим:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} [F(p) e^{pt}], \quad t > 0$$

Следствие. Пусть функция $F(p) = \frac{R_k(p)}{Q_n(p)}$ есть отношение двух многочленов, $k < n$ и p_1, p_2, \dots, p_n есть нули знаменателя $Q_n(p)$. Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} [F(p) e^{pt}].$$

Доказательство. Запишем функцию $F(p) = \frac{R_k(p)}{Q_n(p)}$ в виде

$$F(p) = \frac{R_k(p)}{Q_n(p)} = \frac{a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{p^k (a_0 + a_1 p^{-1} + \dots + a_k p^{-k})}{p^n (b_0 + b_1 p^{-1} + \dots + b_n p^{-n})} = \frac{1}{p^{n-k}} \cdot \varphi(p),$$

$$\text{где } \varphi(p) = \frac{(a_0 + a_1 p^{-1} + \dots + a_k p^{-k})}{(b_0 + b_1 p^{-1} + \dots + b_n p^{-n})}.$$

Так как $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = \frac{a_0}{b_0}$, то $|\varphi(p)| \leq M$ при условии, что $|p| \geq R$. Поэтому

$$|F(p)| = \frac{1}{|p|^{n-k}} \cdot |\varphi(p)| \leq \frac{M}{R^{n-k}} = \varepsilon(R).$$

Так как $n - k > 0$, то $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, и можно применить теорему 7.2:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} F(p) e^{pt}.$$

Пример 7.18. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1}{(p-4)^2(p-3)}$.

Решение. Изображение $F(p)$ является правильной дробью, имеет две особые точки: $p = 4$ – полюс второго порядка, $p = 3$ – полюс первого порядка. Используя следствие из теоремы 7.2, найдем оригинал:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}_{p=4} [F(p) e^{pt}] + \operatorname{Res}_{p=3} [F(p) e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow 4} \left(\frac{e^{pt} \cdot (p-4)^2}{(p-4)^2(p-3)} \right)' + \lim_{p \rightarrow 3} \left(\frac{e^{pt} \cdot (p-3)}{(p-4)^2(p-3)} \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow 4} \left(\frac{e^{pt} \cdot t(p-3) - e^{pt}}{(p-3)^2} \right) + \lim_{p \rightarrow 3} \left(\frac{e^{pt}}{(p-4)^2} \right) = e^{4t}(t-1) + e^{3t}. \end{aligned}$$

Этот оригинал можно было найти, разлагая $F(p)$ на простейшие дроби.

Отыскание оригинала с помощью разложения в ряд

Пусть функция $F(p)$ в окрестности бесконечно удаленной точки разложима в ряд

$$F(p) = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}.$$

Тогда $F(p)$ является изображением оригинала

$$f(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!}t + \frac{c_2}{2!}t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}t^n. \quad (7.11)$$

Эта формула основана на том, что $\frac{1}{p^{n+1}} \div \frac{t^n}{n!}$. Строгое обоснование формулы мы приводить не будем.

Пример 7.19. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$.

Решение. Функция $F(p)$ имеет две особые точки $p=i$, $p=-i$ и является аналитической в окрестности бесконечности $|p| > 1$. Для разложения функции $F(p)$ в ряд в этой окрестности представим функцию $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} = (p^2 + 1)^{-1/2} = \frac{1}{p} \cdot \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}$$

и воспользуемся стандартным разложением

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Тогда в окрестности бесконечности $|p| > 1$ имеем $\left|\frac{1}{p^2}\right| < 1$ и

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{p} \cdot \left(1 + \frac{-1/2}{1!} \frac{1}{p^2} + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!} \frac{1}{p^4} + \dots\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^3} + \frac{1 \cdot 3}{2! 2^2 p^5} - \dots$$

С учетом формулы (7.11), оригинал $f(t)$ будет иметь вид:

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{t^2}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! 4!} \frac{t^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{t^2}{2^2 \cdot 1!} + \frac{t^4}{2^4 \cdot (2!)^2} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/2)^{2n}}{(n!)^2}.$$

Сумму этого ряда называют функцией Бесселя нулевого порядка и обозначают $J_0(t)$.

7.4. Применение операционного исчисления

Использование операционного метода основано на том, что при переходе от оригинала к изображению операции дифференцирования и интегрирования заменяются более простыми операциями умножения и деления. Поэтому операционный метод удобно применять для решения дифференциальных и интегральных уравнений. При этом следует:

- 1) перейти от оригиналов к их изображениям (исходное дифференциальное или интегральное уравнение для оригиналов перейдет в более простое уравнение для изображений – операторное уравнение);
- 2) из операторного уравнения найти изображение;
- 3) по изображению восстановить оригинал.

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \end{cases} \quad a, b, c - \text{постоянные.}$$

1). Перейдем от оригиналов к их изображениям, полагая $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$:

$$\begin{cases} x(t) \div X(p), \\ x'(t) \div pX(p) - x(0), \\ x''(t) \div p^2X(p) - px(0) - x'(0). \end{cases}$$

Умножая первое соотношение на c , второе – на b , третье – на a и складывая, получим:

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) \div X(p)(ap^2 + bp + c) - \underbrace{x(0)(ap + b)}_{=x_0} - \underbrace{ax'(0)}_{=x_1}.$$

С другой стороны, $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \div F(p)$.

Сравнивая эти два соотношения, получим операторное уравнение

$$X(p)(ap^2 + bp + c) - x_0(ap + b) - ax_1 = F(p).$$

2). Решая операторное уравнение, найдем изображение

$$X(p) = \frac{F(p) + x_0(ap + b) + ax_1}{ap^2 + bp + c}.$$

3). По изображению $X(p)$ восстановим оригинал $x(t)$.

Замечания.

- 1). Случай дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами принципиально ничем не отличается от случая уравнения 2-го порядка.
- 2). При операционном методе решения, в отличие от классического метода, получаем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, минуя получение общего решения.
- 3). Для получения общего решения уравнения нужно считать начальные значения не заданными, а произвольными постоянными, т.е. $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$.
- 4). Операционный метод применим и когда функция $f(t)$ кусочна непрерывна.
- 5). Если начальные условия заданы при $t = t_0 \neq 0$, то сначала нужно сделать замену $t - t_0 = \tau$. При этом $x'_t(t) = x'_\tau(t) \cdot \tau'_t = x'_\tau(t)$, $x''_{tt}(t) = x''_{\tau\tau}(t)$.

Пример 7.20. Решить задачу Коши:
$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = f(t), \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$$

если функция $f(t)$ задана графиком (рис.44).

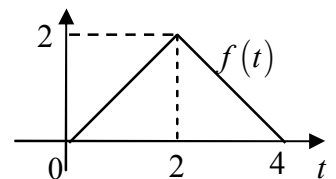


Рис.44

Решение. 1). Перейдем от оригиналов к их изображениям, полагая $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$. Тогда

$$\begin{aligned}
x(t) &\div X(p), \\
x''(t) &\div p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p), \\
f(t) &\div F(p) = \frac{1}{p^2} - 2 \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-4p} \quad (\text{пример 7.10}).
\end{aligned}$$

Используя свойство линейности, перейдем в дифференциальном уравнении от оригиналов к изображениям:

$$p^2 X(p) + 9X(p) = F(p).$$

2). Из полученного алгебраического уравнения найдем изображение

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 9} = \frac{1}{p^2(p^2 + 9)} - 2 \cdot \frac{1}{p^2(p^2 + 9)} \cdot e^{-2p} + \frac{1}{p^2(p^2 + 9)} \cdot e^{-4p}.$$

3). По изображению восстановим оригинал.

Сначала найдем оригинал первого слагаемого

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 9)} = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 9} \right) \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{p^2 + 9} \right) \cdot \frac{1}{9} \div \left(t - \frac{1}{3} \sin t \right) \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27} \right) \eta(t).$$

Второе и третье слагаемые в изображении $X(p)$ отличаются от первого множителями e^{-2p} и e^{-4p} , значит, их оригиналы запаздывают по сравнению с предыдущим на 2 и 4:

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 9)} \cdot e^{-2p} \div \left(\frac{t-2}{9} - \frac{\sin(t-2)}{27} \right) \eta(t-2), \quad \frac{1}{p^2(p^2 + 9)} \cdot e^{-4p} \div \left(\frac{t-4}{9} - \frac{\sin(t-4)}{27} \right) \eta(t-4).$$

$$\text{Окончательно, } x(t) = \left(\frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27} \right) \eta(t) - 2 \left(\frac{t-2}{9} - \frac{\sin(t-2)}{27} \right) \eta(t-2) + \left(\frac{t-4}{9} - \frac{\sin(t-4)}{27} \right) \eta(t-4).$$

$$\text{Подставляя } \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \eta(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}, \quad \eta(t-4) = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}, \text{ получим:}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27}, & 0 < t < 2, \\ \frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27} - 2 \left(\frac{t-2}{9} - \frac{\sin(t-2)}{27} \right), & 2 \leq t < 4, \\ \frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27} - 2 \left(\frac{t-2}{9} - \frac{\sin(t-2)}{27} \right) + \left(\frac{t-4}{9} - \frac{\sin(t-4)}{27} \right), & t \geq 4. \end{cases}$$

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Дюамеля

Метод Дюамеля выгодно применять при решении уравнения со сложной правой частью $f(t)$ или при решении нескольких уравнений с одинаковыми левыми и различными правыми частями.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t), \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

с нулевыми начальными условиями и постоянными коэффициентами a, b, c .

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} a x_1''(t) + b x_1'(t) + c x_1(t) = 1, \\ x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

с нулевыми начальными условиями и правой частью, равной единице.

Перейдем в задачах (7.12) и (7.13) от оригиналов к их изображениям, полагая $x(t) \div X(p)$, $x_1(t) \div X_1(p)$, $f(t) \div F(p)$ и учитывая, что $x'(t) \div pX(p)$, $x''(t) \div p^2X(p)$, $1 \div \frac{1}{p}$.

Получим следующие операторные уравнения:

$$X(p)(ap^2 + bp + c) = F(p), \quad (7.14)$$

$$X_1(p)(ap^2 + bp + c) = \frac{1}{p}. \quad (7.15)$$

Поделим эти уравнения: $\frac{X(p)}{X_1(p)} = pF(p) \Rightarrow X(p) = pF(p)X_1(p)$.

Применив формулу Дюамеля (формула №10 из таблицы изображений), получим:

$$x(t) = f(t) * x_1'(t) + f(t) \cdot \underbrace{x_1(0)}_{=0} = f(t) * x_1'(t).$$

Итак, для решения задачи (7.12) нужно:

1) рассмотреть вспомогательную задачу (7.13) с правой частью, равной единице

$$\begin{cases} a x_1''(t) + b x_1'(t) + c x_1(t) = 1, \\ x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0; \end{cases}$$

2) в задаче (7.13) перейти к изображениям $X_1(p)(ap^2 + bp + c) = \frac{1}{p}$ и восстановить оригинал $x_1'(t)$ по его изображению $pX_1(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c}$;

3) решение исходной задачи (7.12) найти по формуле

$$x(t) = f(t) * x_1'(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot x_1'(t - \tau) d\tau.$$

Замечание

Если начальные условия не являются нулевыми, то нужно их сделать нулевыми с помощью замены $y(t) = x(t) + \lambda t + \mu$ и подбора чисел λ, μ .

Пример 7.21. Решить задачу Коши $\begin{cases} x''(t) + x(t) = \frac{1}{4 + \sin^2 t}, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$

Решение. Для функции $f(t) = \frac{1}{4 + \sin^2 t}$ изображение найти сложно. Поэтому применим метод Дюамеля. Для этого запишем вспомогательную задачу с правой частью, равной единице:

$$\begin{cases} x_1''(t) + x_1(t) = 1, \\ x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0. \end{cases}$$

Перейдем от оригиналов к их изображениям, полагая $x_1(t) \div X_1(p)$ и учитывая, что $x_1'(t) \div pX_1(p)$, $x_1''(t) \div p^2X_1(p)$, $1 \div \frac{1}{p}$. Получим:

$$X_1(p)(p^2+1) = \frac{1}{p} \Rightarrow pX_1(p) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow x_1'(t) = \sin t.$$

Решение исходной задачи найдем по формуле

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t) * x_1'(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot x_1'(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{4+\sin^2 \tau} \cdot \sin(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \sin t \frac{\cos \tau}{4+\sin^2 \tau} d\tau - \int_0^t \cos t \frac{\sin \tau}{4+\sin^2 \tau} d\tau = \sin t \int_0^t \frac{d \sin \tau}{4+\sin^2 \tau} + \cos t \int_0^t \frac{d \cos \tau}{5-\cos^2 \tau} = \\ &= \sin t \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin t}{2} + \frac{\cos t}{2\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}+\cos t}{\sqrt{5}-\cos t} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{\sin t}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sin t}{2} + \frac{\cos t}{2\sqrt{5}} \left(\ln \frac{\sqrt{5}+\cos t}{\sqrt{5}-\cos t} - \ln \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \right). \end{aligned}$$

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Операционный метод решения системы линейных дифференциальных уравнений аналогичен методу решения одного линейного дифференциального уравнения. Переходя от оригиналов к изображениям, получим систему линейных алгебраических уравнений; решим ее одним из известных способов, например, методом Гаусса, или по формулам Крамера; затем по найденным изображениям восстановим оригиналы.

Пример 7.22. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. 1). Перейдем от оригиналов к изображениям.

Пусть $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$. Тогда

$$\begin{aligned} x'(t) \div pX(p) - x(0) &= pX(p), \\ x''(t) \div p^2X(p) - px(0) - x'(0) &= p^2X(p), \\ y'(t) \div pY(p) - y(0) &= pY(p). \end{aligned}$$

Учтём еще, что $1 - 2t \div \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2}$. Тогда дифференциальные уравнения для оригиналов перейдут в алгебраические уравнения для изображений:

$$\begin{cases} pX - pY - 2X + 2Y = \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2}, \\ p^2X + 2pY + X = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X(p-2) - Y(p-2) = \frac{(p-2)}{p^2}, \\ X(p^2+1) + 2pY = 0. \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на $p-2$:
$$\begin{cases} X - Y = 1/p^2, \\ X(p^2+1) + 2pY = 0. \end{cases}$$

2). Найдем изображения X и Y из этой системы алгебраических уравнений:

$$X = \frac{2}{p(p+1)^2}, \quad Y = X - \frac{1}{p^2}.$$

3). По изображениям восстановим оригиналы. Для этого функцию $X(p)$ разложим на простейшие дроби

$$\frac{2}{p(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}. \quad (7.16)$$

Приведем к общему знаменателю и приравняем числители:

$$2 = A(p+1)^2 + Bp(p+1) + Cp.$$

Это равенство верно при любом p . В частности, при $p=0$ получим $2=A$, при $p=-1$ получим $2=-C$. Приравняв коэффициенты при p^2 , получим $0=A+B$, откуда $B=-2$. Подставляя найденные коэффициенты в разложение (7.16), получим:

$$X(p) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2}.$$

Теперь воспользуемся табличными изображениями: $\frac{1}{p} \div 1$, $\frac{1}{p+1} \div e^{-t}$. Так как $\frac{1}{p^2} \div t$, то $\frac{1}{(p+1)^2} \div te^{-t}$ (формула №8 из таблицы изображений) и $x(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t}$.

Из равенства $Y = X - \frac{1}{p^2}$ получим: $y(t) = x(t) - t = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} - t$

Окончательно имеем:
$$\begin{cases} x(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t}, \\ y(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} - t. \end{cases}$$

Решение интегрального уравнения типа свертки

Интегральным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная функция входит под знак интеграла. Мы рассмотрим лишь интегральное уравнение типа свертки, т.е. уравнение вида

$$\lambda x(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

При $\lambda=0$ уравнение называют интегральным уравнением Вольтера 1-го рода.

При $\lambda \neq 0$ уравнение называют интегральным уравнением Вольтера 2-го рода.

В этом уравнении интеграл представляет собой свертку функций $x(t)$ и $g(t)$, поэтому уравнение удобно записать в виде $\lambda x(t) = f(t) + x(t) * g(t)$ и решать операционным методом, переходя от оригиналов к изображениям.

Пусть $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$. Тогда свертка функций $x(t)$ и $g(t)$ имеет изображение $X(p) \cdot G(p)$. При этом интегральное уравнение для оригинала перейдет в алгебраическое уравнение для его изображения:

$$\lambda X(p) = F(p) + X(p) \cdot G(p).$$

Найдем изображение $X(p)$ из этого уравнения: $X(p) = \frac{F(p)}{\lambda - G(p)}.$

По изображению восстановим оригинал $x(t)$.

Пример 7.23. Найти функцию $x(t)$ из уравнения $\int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau = \sin^2 t.$

Решение. В этом уравнении интеграл представляет собой свертку функций $x(t)$ и $\sin t$, поэтому уравнение удобно записать в виде $x(t) * \sin t = \sin^2 t$.

1). Перейдем от оригиналов к изображениям. Пусть $x(t) \div X(p)$. Из таблицы изображений имеем: $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} \right)$. Тогда свертка функций $x(t)$ и $\sin t$, имеет изображение $X(p) \cdot \frac{1}{p^2+1}$. При этом интегральное уравнение для оригинала перейдет в алгебраическое уравнение для его изображения:

$$X(p) \cdot \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} \right).$$

2). Найдем изображение $X(p)$ из этого уравнения:

$$X(p) = \frac{p^2+1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} \right) = \frac{p^2+1}{2} \cdot \frac{4}{p(p^2+4)}$$

3). По изображению восстановим оригинал. Для этого числитель представим в виде $4p^2+4 = (p^2+4) + 3p^2$. Тогда

$$X(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4p^2+4}{p(p^2+4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(p^2+4) + 3p^2}{p(p^2+4)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + 3 \frac{p}{p^2+4} \right).$$

Получили сумму табличных изображений. Используя свойство линейности можно записать оригинал

$$x(t) = \frac{1}{2} (1 + 3 \cos 2t).$$

Вычисление несобственных интегралов

Пусть оригинал $f(t)$ с показателем роста s_0 имеет изображение $F(p)$.

Тогда из определения изображения следует, что

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p) \quad \text{в области } \operatorname{Re} p > s_0. \quad (7.17)$$

Пример 7.24. Вычислить интегралы $\int_0^{+\infty} \cos 4t \cdot e^{-5t} dt$, $\int_0^{+\infty} t \sin 2t \cdot e^{-4t} dt$.

Решение. Интеграл $\int_0^{+\infty} \cos 4t \cdot e^{-5t} dt$ есть изображение оригинала $\cos 4t$ при $p=5$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} \cos 4t \cdot e^{-5t} dt = \left. \frac{p}{p^2+4^2} \right|_{p=5} = \frac{5}{41}.$$

Отметим, что условие $\operatorname{Re} p > s_0$ выполняется, т.к. $\operatorname{Re} p = 5$, $s_0 = 0$ (п. 7.2, свойство 1).

Интеграл $\int_0^{+\infty} t \sin 2t \cdot e^{-4t} dt$ есть изображение оригинала $t \sin 2t$ при $p=4$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} t \sin 2t \cdot e^{-4t} dt = -\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' \bigg|_{p=4} = \frac{2 \cdot 2p}{(p^2+4)^2} \bigg|_{p=4} = \frac{1}{25}.$$

Здесь использована формула №5 из таблицы изображений. Отметим, что условие $\operatorname{Re} p > s_0$ выполняется, т.к. $\operatorname{Re} p = 4$, $s_0 = 0$ (свойство 4 для оригиналов из п. 7.1 и свойство 1 для изображений из п. 7.2).

Библиографический список

1. Краснов М.Л. Вся высшая математика / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2005. Т.4. 352 с.
2. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики / Б.К. Пчелин. М.: Высшая школа, 1972. 462 с.
3. Сидоров В.Ю. Лекции по теории функций комплексного переменного / В.Ю. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. М.: Наука, 1982. 488 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2004. 603 с.
5. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. СПб.: Изд-во «Лань», 2002. 640 с.
6. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. М.: Наука, 1980. 946 с.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. 831 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
9. Сборник задач по математике для втузов: В 4 ч. Ч.4 / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 2000. 464 с.
10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. 831 с.

Оглавление

1. Комплексные числа.....	3
1.1. Определение, изображение, формы записи	3
1.2. Основные действия с комплексными числами.....	4
2. Функции комплексного переменного.....	7
2.1. Элементарные функции.....	7
2.2. Предел и непрерывность функции.....	11
2.3. Дифференцируемые функции.....	12
2.4. Аналитические функции.....	16
3. Интегрирование функций.....	17
3.1. Определение и свойства интеграла	17
3.2. Интегральные теоремы	19
3.3. Интегральные формулы Коши.....	22
4. Ряды в комплексной области.....	25
4.1. Числовые ряды.....	25
4.2. Функциональные ряды.....	26
4.3. Разложение аналитической функции в степенной ряд.....	29
5. Теория вычетов	34
5.1. Нули функции.....	34
5.2. Особые точки функции и их классификация.....	36
5.3. Вычеты функции в ее особых точках	39
6. Применение вычетов	41
6.1. Применение вычетов к вычислению интегралов $\oint_L f(z)dz$	41
6.2. Применение вычетов к вычислению интегралов $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	43
6.3. Применение вычетов к вычислению интегралов	
$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i ax} dx, I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx, I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$	45
7. Операционное исчисление.....	47
7.1. Понятие оригинала и его изображения.....	47
7.2. Свойства изображений.....	51
7.3. Восстановление оригинала по его изображению.....	59
7.4. Применение операционного исчисления.....	63
7.5. Библиографический список.....	70

Учебное издание

Ревекка Максовна Минькова

**Функции комплексного переменного и
операционное исчисление**

Редактор *И.В. Коришунова*
Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой*

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16	
Бумага типографская	Плоская печать	Усл. печ.л.
Уч.-изд. л.	Тираж	Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19