ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Операционное исчисление»

Авторы

Рябых Г. Ю.,
Фролова Н. В.,
Пристинская О. В.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Учебное пособие содержит основные сведения по курсу операционного исчисления. Приводятся теоремы, которые в дальнейшем используются для разбора типовых заданий курса. Далее даются варианты заданий различного уровня сложности и методические указания к их решению.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения всех факультетов.

Авторы

к.ф.-м.н., профессор кафедры «Прикладная математика»
Рябых Г. Ю.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Фролова Н. В.,
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Пристинская О. В.

Оглавление

§1. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ

Пусть f(t) – комплекснозначная функция действительного переменного t, то есть функция, имеющая вид

F(t)=u(t)+iv(t),

где u(t), v(t) – действительные функции от t. Функция f(t) называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) F(t) – кусочно-непрерывная функция при t$\geq$0, то есть она или непрерывна, или на любом конечном интервале имеет не более конечного числа точек разрыва I-го рода:
2) F(t)=0 при t<0;
3) F(t) растёт не быстрее экспоненциальной функции, то есть существуют такие постоянные M>0, A$\geq$0, что для всех t выполняется неравенство

$|f(t)| \leq e^{\alpha t}$

Число α называется показателем роста.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Пример 1.

Функция $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-3}, t > 0, t < 0 \\ 0, \end{cases}$ оригиналом не будет, так как t=3 есть точка разрыва 2-го рода.

Пример 2.

Функция $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I, \quad 0 < & t < 2 \\ 3, & t > 2 \end{cases}$ *будет оригиналом*, так как она имеет разрывы только I-го рода и равна 0 при t<0, $|f(t)| \leq 3e^{0t}$.

Пример 3.

Функция $f(t) = \begin{cases} t^2, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ будет оригиналом, так как она непрерывна при всех t, равна 0 при t<0, причём $|t^2| < Me^t$, поскольку

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{e^t}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{e^t}=0$$

Замечание. В дальнейшем будем предполагать, не оговаривая это каждый раз , что все функции f(t) тождественно равны 0 при t<0.

Пример 4. Найти изображение $f(t)=e^{\alpha t}$, где $\alpha=\beta+ik$ - *любое* комплексное число.

Условия. I-3 на оригинал выполняются, причём $|e^{\alpha t}|=e^{Re(\beta+ik)}=e^{\beta t}$, то есть оригинал $e^{\alpha t}$ имеет показатель роста β.

При Rep> β имеем по определению изображения

$$Le^{\alpha t}=\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}e^{-pt}\,dt$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}dt=\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-\alpha}$$

Так как $|e^{-(p-\alpha)t}|=e^{Re(\alpha-p)t}=e^{-(Rep-\beta)t}\to 0$

При t $\to+\infty$.

Итак, $Le^{\alpha t}=\frac{1}{p-\alpha}$

В частности, если a=0, имеем L1=$\frac{1}{p}$.

Изображения основных функций – оригиналов приведены в таблице 1:

Таблица 1

	Оригинал F(t)	Изображение F(p)		Оригинал F(t)	Изображение F(p)
1	h(t)	$\frac{1}{p}$	9	$e^{\alpha t}\sin b\,n\,\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	10	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
3	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$	11	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

4	$\cos wt$	$\dfrac{p}{p^2+w^2}$	12	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5	$\sin(wt+\phi)$	$\dfrac{w\cos\phi+p\sin\phi}{p^2+w^2}$	13	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
6	$\cos(wt+\phi)$	$\dfrac{w\cos\phi-p\sin\phi}{p^2+w^2}$	14	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
7	$\sin wt$	$\dfrac{w}{p^2-w^2}$	15	$t\,sh\,\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
8	chwt	$\dfrac{p}{p^2-w^2}$	16	$t\,ch\,\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$

§2. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Сформулируем основные свойства преобразования Лапласа в предположении, что все функции, к которым применяется преобразование Лапласа, являются оригиналами.

1) *Свойство линейности.*

Для любых комплексных чисел С1 и С2

$$L[C1f1(t)+C2f2(t)]=C1L1f1(t)+C2Lf2(t).$$

2) Теорема подобия.

Если Lf(t)=F(p), то для a>0 Lf(at)= $\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$

3) Теорема смещения.

Если Lf(t)=F(p), то для a>0 $Le^{at}f(t)=F(p-a)$

4) *Теорема запаздывания.*

Если Lf(t)=F(p), то для a>0 $Lf(t-a)=e^{-ap}F(p)$

5) *Теорема опережения.*

Если Lf(t)=F(p) ,то для a>0 $Lf(t+a)=e^{ap}[F(p)-\int_0^a e^{-pt}f(t)dt]$

6) *Дифференцирование оригинала.*

Если Lf(t)=F(p), то Lf′(t)=pF(p)-f(0),

$$Lf''(t)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$$

$$L1f^{(n)}(t)=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)--$$
$$-f^{(n-1)}(0).$$

В частности, если f(0)=f′(0)=… … …=$f^{(n-1)}(0)$=0, то

Lf′(t)=pF(p)

Lf″(t)= $p^2F(p)$

— — —

— — —

$\overline{Lf^n(t)} = p^n F(p)$

7) Дифференцирование изображения.

Если Lf(t)=F(p), то

L[-tf(t)]=F′(p)

— — —

— — —

8) Интегрирование оригинала.

Если Lf(t)=F(p), то

$L[\int f(t)dt] = \frac{F(p)}{p}$.

9) Интегрирование изображения.

Если Lf(t)=F(p) и интеграл $\int_p^{+\infty} F(z)dz$ сходится, то L$\frac{F(t)}{t}$=$\int_p^{+\infty} F(z)dz$.

Свойства преобразования Лапласа облегчают в ряде случаев переход от оригинала к изображению.

Проиллюстрируем это на примерах.

Пример I. Найти изображение оригинала sin4t cos3t.

Решение.

Sin4tcos3t=$\frac{1}{2}$ (sin7t+Lsint)**=** $\frac{1}{2}$ ($\frac{7}{3^2+7^2}$+$\frac{1}{p^2+1}$).

Пример 2. Найти изображение оригинала $\cos^2$t.

L$\cos^2$t=$\frac{1}{2}$ (L1+Lcos2t)= $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ $+$ $\frac{p}{p^2+2^2}$)

Пример 3. Найти изображение оригинала $5ch2t + 2e^{-3t}$

Решение

L($5ch2t + 2e^{-3t}$)=5lch2t+$24e^{-3t}$=$\frac{5p}{p^2-2^2}$ $+$ $\frac{2}{p+3}$

10) *Теорема умножения изображений*.

Если Lf(t)=F(p), Lg(t)=G(p), то L[f*g]=F(p)G(p).

Или $L^{-1}[F(p)G(p)] = f * g$.

Пример 4. Найти оригинал соответствующий изображению $\frac{1}{(p-1)(p-2)}$, то есть L^{-1} $\frac{1}{(p-1)(p-2)}$.

Решение.

По формуле (2) таблицы 1 имеем

$L^{-1}\frac{1}{p-1} = e^t$, $L^{-1}\frac{1}{p-2} = e^{2t}$

Согласно теореме умножения изображений для определения
$L^{-1}(\frac{1}{p-1} * \frac{1}{p-2})$ надо найти свёртку оригиналов e^t и e^{2t}.
Вычисляем свёртку

$$e^t * e^{2t} = \int_0^t e^{-t} e^{2(t-T)} dT$$

$$= e^{2t} \int_0^t e^{-T} dT = -e^{2t} e^{-T}| = e^{2t} - e^t$$

Итак, $L^{-1}\frac{1}{(p-1)(p-2)} = e^{2t} - e^t$.

Пример 5. Найти $L^{-1}\frac{p}{(p^2+1)^2}$

Решение. Так как по формулам (3) и (4) таблицы 1
$L^{-1}\frac{1}{p^2+1} = sint,\ L^{-1}\frac{p}{p^2+1} = cost,$ то для определения
$L^{-1}\frac{p}{(p^2+1)^2}$ cost и sint имеем

$$cost * sint = \int_0^t cosT sin(t-T) dT$$

$$= \int_0^t sint cos^2 T\ dT$$

$$- \int_0^t sinT cosT 2t$$

$$= sint \int_0^t \frac{1+cos2T}{2} dt$$

$$- cost \int_0^t \frac{sin2T}{2} dt = \frac{t}{2} sint$$

Итак, $L^{-1}\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{t}{2} sint$

§3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1) *Решение линейных дифференциальных уравнений и систем.*

Применяя преобразование Лапласа к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами с неизвестным решением-оригиналом y(t), получаем алгебраическое линейное уравнение относительно изображения y(p).

Решая операторное уравнение находим изображение y(p). После этого остаётся по найденному изображению y(p) восстановить его оригинал y(t) – искомое решение дифференциального уравнения. Для восстановления оригинала по его изображению могут быть использованы свойства преобразования Лапласа.

Пример 1. Найти частное решение уравнения.

$y'' + 2y' = 2y = 0,$

удовлетворяющее начальным условиям y(0)=1, y′(0)=2.

Решение.

Применяя к уравнению преобразование Лапласа, имеем

$L(y'' + 2y' + 2y) = L0, L0 = 0$

В силу свойства линейности получаем

$Ly'' + 2Ly' = 2Ly = 0,$

Обозначим Ly(t)=Y(p),

Тогда по теореме дифференцирования оригинала, имеем

Ly′(t)=pY(p)-y(0)=pY(p)-1

Ly″(t)=$p^2Y(p) - py(o) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 2$

Имеем операторное уравнение

$p^2Y(p) - p - 2 + 2[pY(p) - 1] + 2Y(p) = 0$

Решая операторное уравнение, находим изображение

$$Y(p) = \frac{p+4}{p^2 + 2p + 2}$$

Осталось от изображения перейти к оригиналу, для этого разлагаем изображение на элементарные дроби, оригиналы которых есть в таблице I.

Имеем

$$Y(p) = \frac{p+4}{(p+1)^2 + 1} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} = \frac{3}{(p+1)^2 + 1}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа и формулы (7) и (8) таблицы I, получаем

$$L^{-1}Y(p) = L^{-1}\frac{p+1}{(p+1)^2+1} + 3L^{-1}\frac{3}{(p+1)^2+1}$$

$$y(t) = e^{-t}cost + 3e^{-t}sint$$

Пример 2.

$$y'' - 5y' + 6y = -2e^t \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Решение.

$$L(y'' - 5y' + 6y) = L(-2e^t)$$

$$Ly'' - 5Ly' + 6Ly = -2Le^t$$

Обозначим Ly=$\tilde{y}$

Тогда Ly′=p$\tilde{y}$

Ly″=$p^2\tilde{y}$, $Le^t = \frac{1}{p-1}$.

Подставляя, получаем операторное уравнение

$$p^2\tilde{y} - 5p\tilde{y} + 6\tilde{y} = -\frac{2}{p-1}$$

$$(p^2 - 5p + 6)\tilde{y} = -\frac{2}{p-1}$$

$$\tilde{y} = -\frac{2}{(p-1)(p^2-5p+6)} = -\frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

Для перехода от изображения к оригиналу разложим изображение на элементарные дроби методом неопределённых коэффициентов.

Имеем

$$\frac{-2}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$$

Приведём правую часть к общему знаменателю

-2$\equiv$A(p-2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p-2)

Поскольку это тождество, то оно справедливо при любых значениях p, в частности при значениях p, равных корням знаменателя.

Полагая в тождестве p=I, p=2, p=3, имеем

p=1 | -2=2A A=-1

p=2| -2=-B B=2

p=3| -2=2C C=1

Итак, $\tilde{y} = \frac{-1}{p-1} + \frac{2}{p-2} - \frac{1}{p-3}$

Применяя обратное преобразование Лапласа и формулу (2) таблицы 1, получаем

$$L^{-1}\tilde{y} = -L^{-1}\frac{1}{p-1} + 2L^{-1}\frac{1}{p-2} - L^{-1}\frac{1}{p-3}$$
$$y = -e^{t} + 2e^{2t} - e^{-3t}$$

2) *Решение интегральных уравнений в свертках.*

Пример 3. Найти решение уравнения

$$y(t) = sin2t - \int_0^t y(T)e^{t-T}dt$$

Используя свёртку, запишем уравнение в виде

$$y(t) = \sin 2t - [e^{t} * y(t)]$$

Применяя преобразование Лапласа, имеем

$$Ly(t) = Lsin2t - L[y(t) * e^{t}]$$

Обозначим $Ly(t) = \tilde{y}(p)$

$$Lsin2t = \frac{2}{p^2+4}$$
$$L[y(t) * e^{t}] = \tilde{y}\frac{1}{p-1}$$

Подставляя, имеем операторное уравнение

$$\tilde{y} = \frac{2}{p^2+4} - \frac{\tilde{y}}{p-1}$$
$$\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)\tilde{y} = \frac{2}{p^2+4}$$
$$\frac{p}{p-1}\tilde{y} = \frac{2}{p^2+4}$$
$$\tilde{y} = \frac{2(p-1)}{p(p^2+4)} = \frac{2}{p^2+4} - \frac{2}{p(p^2+4)}$$

Имеем

$$-\frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$
$$-2 \equiv A(p^2+4) + (Cp+D)p$$

p=0 | -2=4A A= $-\frac{1}{2}$

При p^2 | 0=A+C $\rightarrow C = \frac{1}{2}$

При p | 0=D D=0

$$\tilde{y} = \frac{2}{p^2+2^2} - \frac{1}{2} * \frac{1}{p} + \frac{1}{2} * \frac{p}{p^2+4}$$

$$L^{-1}\tilde{y} = 2L^{-1}\frac{1}{p^2+2^2} - \frac{1}{2}L^{-1}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}L^{-1}\frac{p}{p^2+2^2}$$

$$y = sin2t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2t$$

ПРИЛОЖЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Теорема подобия: L(f(αt))=$\frac{1}{\alpha}$F ($\frac{p}{\alpha}$) , α>0 .
2. Теорема смещения: L($e^{\alpha t}f(t)) = F\,(p-\alpha)$
3. Теорема запаздывания: L(f$(t-\tau)$)=$e^{-p\gamma}$, F(p) , τ ≥ 0 .
4. Теорема дифференцирования оригиналов :

L(f′(t))=pF (p)-f(0) , L(f″(t))= p^2F(p)-pf(0)-f″ ,

L($f^{(n)}(t)$=p^nF(p)-p^{n-1} f(0)-p^{n-2} f′(0)-…$-p^{(n-1)}$(0) .

5. Теорема интегрирования оригиналов :L$(\int_0^t f(x)dx)$= $\frac{F(P)}{p}$
6. Теорем дифференцирования изображений:

L(-t*f(t))=F′ (p) : L($(-1)^n t^n f(t)) = F^{(n)}(p)$

7. Теорема интегрирования изображения:

L($\frac{f(t)}{f}) = \int_p^\infty F(q)dq$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1

Найти изображение F(p) по заданному оригиналу f(t):

1. a) $ch3t \cdot cost$ b) t$sin^4 t$ c) $\frac{cos2t-cost}{t}$
2. a) $ch2t \cdot sin2t$ b) t$cos^4 t$ c) $\frac{sin2t}{t}$
3. a) 2sint˙ $sin3t$ b) t$sin^3 t$ c) $\frac{e^{-t}sint}{t}$
4. a) sh2t˙ $sin2t$ b) $tcos^3 t$ c) $\frac{sin^2 t}{t}$
5. a) chtsin2t b) t$sin^4 2t$ c) $\frac{\sin 2t \sin 3t}{t}$

6. a) 2(cht$\sin 2t + sh2t\cos t)$ b) $tsin^3 2t$ c) $\frac{e^{2t}-e^t}{t}$

7. a) $sht \cdot cos2t$ b) $tcos^4 2t$ c) $\frac{1-cos3t}{t}$

8. a) $e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$ b)$te^{-2t}cht$ c) $\frac{sint \cdot cost}{t}$

9. a) 2($cht\sin t - sht\cos t)$ b) $tcos^2 2t$ c) $\frac{1-e^t}{te^{2t}}$

10. a) $cht \cdot \sin 4t$ b)$te^{-t}\cos t$ c)$\frac{e^{2t}\sin t}{t}$

11. a) $e^{2t}\cos 3t\cos 4t$ b)$t\sin tch2t$ c) $\frac{sh^2 t}{t}$

12. a) $sht \cdot \cos 2t\sin 3t$ b)$t\cos t\, ch2t$ c) $\frac{\sin 7t \cdot \cos 3t}{t}$

ЗАДАНИЕ 2

Найти оригинал f(t) по изображению F(p):

1. a) $F(P)=\frac{P^2-4P^2+7P-22}{(P-2)^2(P^2-P-20)}$

   b) $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$

2. a) $F(p)=\frac{p^2+7p+18}{(P+2)^2}$

   b) $F(p)=\frac{p^2-5p+2}{(p-2)(p^2+1)}$

3. a) $F(p)=\frac{p+2}{p^2(p^2-1)}$

   b) $F(p)=\frac{2p^2+17p-17}{(p-1)^2(p^2+16)}$

4. a) $F(p)=\frac{p^2-2p+7}{(p+1)(p-2)^2}$

   b) $F(p)=\frac{p^2+8p+31}{(p-1)(p^2+9)}$

5. a) $F(p)=\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$

   b) $F(p)=\frac{2p^2+2p+3}{p^2(p^2+1)}$

6. a) $F(p)=\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$

   b) $F(p)=\frac{3p+5}{p(p^2+1)(p+2)}$

7. a) $F(p)=\frac{1}{(p+5)^2(p+3)}$

   b) $F(p)=\frac{p^2-11p+7}{(p+5)(p^2+4)}$

8. a) $F(p)=\frac{p^2-5p+22}{(p+2)(p-1)^2}$

   b) $F(p)=\frac{2}{p((p^2-2p+2)}$

9. a) $F(p)=\frac{2p+1}{(p+3)^2(p+1)}$

   b) $F(p)=$

10. a) $F(p)=\frac{p}{(p-1)(p+1)^2}$

    b) $F(p)=\frac{5p-29}{(p+2)(p^2+9)}$

11. a) $F(p)=\frac{2p^2+41p-91}{(p-2)(p+3)(p-4)}$

    b) $F(p)=\frac{4p+5}{(p+1)^2(p^2+1)}$

12. a) $F(p)=\frac{4p^2+4p-8}{p^2-4p}$

    b) $(p)=\frac{-5p^2+25p^2-35p+44}{(p-1)^3(p^2+4)}$

13. a) $F(p)=\frac{p-4}{4p^2-p}$

    b) $F(p)=\frac{6p^2+4p-8}{(p+2)^2(p^2+4)}$

14. a) $F(p)=\frac{3p^4+3p^3-13p^2+4}{p^3-5p^2+4p}$

    b) $F(p)=\frac{p+2}{(p-1)(p^2+p+1)}$

15 a) $F(p)=\frac{2p^2-5}{p^4-10p^2+9}$

   b) $F(p)=\frac{p^3}{p^4-1}$

16./ a) $F(p)=\frac{(p+2)^2}{p(p-1)^2}$

   b) $F(p)=\frac{2p-9}{(p+4)(p^2+4)}$

17. a) $F(p)=\frac{p^2-3p+2}{p(p+1)^2}$

18. a) $F(p)=\frac{p^3+2}{p^4-p^2}$

b) $F(p)=\frac{p^2+p+28}{(p^2+9)(p-1)}$

b) $F(p)=\frac{-4p^2-2p+8}{(p+2)(p^2+9)}$

19. a) $F(p)=\frac{p^2}{(p+2)^2(p+4)^2}$

b) $F(p)=\frac{6p+8}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

20. a) $F(p)=\frac{p^2-2p+3}{(p-1)(p^3-4p^2+3p)}$

b) $F(p)=\frac{p^3+p^2-1}{p^3(p^2+1)}$

21. a) $F(p)=\frac{p^2-8p+4}{p^3(p-2)}$

b) $F(p)=\frac{9p+17}{(p-3)(p^2+4p+3)}$

22. a) $F(p)=\frac{6p^2+5p+1}{(p-1)(p^2+p)}$

b) $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}$

23. a) $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p-2)(p+5)}$

b) $F(p)=\frac{p^3-6}{p^4+6p^2+8}$

24. a) $F(p)=\frac{5p^2-2p-1}{p^2(p^2-1)}$

b) $F(p)=\frac{2p^2-3p-3}{(p-1)(p^2-2p+5)}$

25. a) $F(p)=\frac{4p+1}{p(p+1)^2}$

b) $F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$

26. a) $F(p)=\frac{p^2+9}{(p^2+9)(p+3)^2}$

b) $F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$

27. a) $F(p)=\frac{1}{p^2(p+2)^2}$

b) $F(p)=\frac{4p^3+4p^2+4p+4}{p^2(p^2+2p+2)}$

28. a) $F(p)=\frac{p^2+4}{p^3(p+2)^2}$

b) $F(p)=\frac{3p+4}{(p-3)(p^2+2p+2)}$

29. a) $F(p)=\frac{1}{(p+2)^3(p-1)^2}$

b) $F(p)=\frac{p+8}{(p-2)(p^2+4p+5)}$

30. a) $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^2(p+4)}$

b) $F(p)=\frac{2p-3}{p(p^2+4p+8)}$

ЗАДАНИЕ 3

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1. $y'' + 5y' + 6y = 12e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$
2. $y''+4y' - 5y = 5x^2 - 3x + 5$, $y(0) = -2, y'(0) = 4$
3. $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$
4. $y''-4y'+3y=e^{2x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$
5. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 0, y'(0) = 2$
6. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$
7. $y''-2y'-8y=8e^{2x}$, $y(0) = 2, y'(0) = -2$
8. $y'' - 2y' - 3y = 8x$, $y(0) = 2, y'(0) = 4$
9. $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$
10. $y''-y'=9e^{2x}$, $y(0) = 0, y'(0) = -5$
11. $y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x$, $y(0) = 0, y'(0) = -1$
12. $y'' - y' = 2x - 1$, $y(0) = 2, y'(0) = -3$
13. $y''+5y'+6y=e^{-2x}$, $y(0) = 2, y'(0) = -4$
14. $y'' - y' = x + 1$, $y(0) = 0, y'(0) = 2$
15. $y'' + 4y = 8\cos x$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$
16. $y''-2y'+y=6x$, $y(0) = y'(0) = 1$
17. $y'' + 2y' + y = 9e^{2x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 3$
18. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin 3x$, $y(0) = 4, y'(0) = 0$
19. $y''-y'+y=x+6$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$
20. $y'' + 5y' + 6y = 4e^{-x}$, $y(0) = 4, y'(0) = -7$
21. $y'' - 4y' + 4y = 6x$, $y(0) = 2, y'(0) = 3$
22. $y''+2y'+y=2\cos x$, $y(0) = y'(0) = 1$
23. $y'' + y' - 2y = 20\sin 2x$, $y(0) = 1, y'(0) = -7$
24. $y'' - 2y' + y = 2xe^{x}$, $y(0) = y'(0) = 0$
25. $y''-2y'+y=4\sin x$, $y(0) = 3, y'(0) = 2$
26. $y'' - 6y' + 8y = 43\sin x$, $y(0) = -6, y'(0) = -36$
27. $y'' - 2y' + 5y = e^{x}$, $y(0) = y'(0) = 1$
28. $y''-2y'-8y=9e^{x}$, $y(0) = y'(0) = 3$
29. $y'' - 4y' + 3y = 3x + 2$, $y(0) = 1, y'(0) = 4$
30. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$

ЗАДАНИЕ 4

Найти частное решение системы линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1. $\begin{cases} y' = y - 2z + 3 \\ z' = y - z + 1 \end{cases}$ $y(0) = 3, z(0) = 2$

2. $\begin{cases} y' - y - 2z = x \\ z' - 2y - z = x \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

3. $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = -1$

4. $\begin{cases} y' = 2z \\ z' = 2y + e^{-x} \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = -1$

5. $\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = 2$

6. $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y + 4z \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = 2$

7. $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -y + 4z \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = 2$

8. $\begin{cases} y' = -y + 3z \\ z' = y + z + e^{-x} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$

9. $\begin{cases} y' = -3y - z \\ 2y' + z' = cosx \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$

10. $\begin{cases} y' = 2y + 3z \\ z' = y + 4z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 4$

11. $\begin{cases} y' + 7y - z = 0 \\ z' + 2y + 5z = 0 \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

12. $\begin{cases} y' + 6y - z = e^{-2x} \\ z' - 2y + 5z = e^{x} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$

13. $\begin{cases} y' = 7y + 3z \\ z' = 6y + 4z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 2$

14. $\begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = -y \end{cases}$ $y(0) = -2, z(0) = 6$

15. $\begin{cases} y' = 4y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 1$

16. $\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = -1$

17. $\begin{cases} 3y' + z' + 2y = 1 \\ y' + 4z' + 3z = 0 \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$

18. $\begin{cases} y' = 5y - z \\ z' = y + 3z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = -1$

19. $\begin{cases} y' = -y + 3z \\ z' = y + z + e^{2x} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

20. $\begin{cases} y' = -z \\ z' = 2y + 2z \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

21. $\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 1$

22. $\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = y - 2z \end{cases}$ $y(0) = 5, z(0) = 0$

23. $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = -1$

24. $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y + z \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = 2$

25. $\begin{cases} y' = -3y + 2z \\ z' = -2y + z \end{cases}$ $y(0) = 4, z(0) = 5$

26. $\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 3$

27. $\begin{cases} y' = -y - 5z \\ z' = y + z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = -1$

28. $\begin{cases} y' = 3y - z \\ z' = 4y - z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = -3$

29. $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -10y + z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = -3$

30. $\begin{cases} y' = -y + 3z \\ z' = y + z + e^{x} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

ЗАДАНИЕ 5
Решить интегральное уравнение:

1. $\phi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\phi(t)dt$
2. $\int_0^x (x-t)^2\phi(t)dt = x^3$
3. $\phi(x) = \int_0^x sh(x-t)\phi(t)\,dt$
4. $\phi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt$
5. $\phi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt$
6. $\phi(x) = x - \int_o^x e^{x-t}\phi(t)dt$
7. $\phi(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\cos(x-t)\phi(t)dt$
8. $\int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt = \sin x$
9. $\phi(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt$
10. $\phi(x) = x - \int_0^x (x-t)\phi(t)dt$
11. $\phi(x) = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-t)}\phi(t)dt$
12. $\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt = \sin x$
13. $\phi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\phi(t)dt$
14. $\int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt = \sin x$
15. $\phi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\phi(t)dt$
16. $\int_0^x e^{2(x-t)}\phi(t)dt = \sin x$
17. $\phi(x) = x - \int_0^x sh(x-t)\phi(t)dt$
18. $\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt = x\sin x$
19. $\phi(x) = shx - \int_0^x ch(x-t)\phi(t)dt$
20. $\int_0^x sh(x-t)\phi(t)dt = x^3e^{-x}$
21. $\phi(x) = 1 + 2\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt$
22. $\int_0^x sh(x-t)\phi(t)dt = x$
23. $\phi(x) = e^x + 2\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt$
24. $\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt = x + x^2$
25. $\phi(x) = \cos x + \int_0^x \phi(t)dt$
26. $\phi(x) = -2\int_0^x e^{-(x-t)}\phi(t)dt$

27. $\phi(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \sin(x-t)\phi(t)dt$
28. $\int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt = x$
29. $\phi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x (3 - 6(x-t) - 4(x-t)^2\phi(t)dt$
30. $\int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt = x^2$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Теория функций комплексного переменного. Гриценко Л.В., Ефименко В.Н., Северо-Кавказский филиал МТУС и Костецкая Г.С. Учебное пособие. 2014.
2. ТФКП и операционное исчисление в примерах и задачах. Пантелеев А.В., Якимова А.С. М.: Высш. шк. Учеб. пособие. 2007.
3. Введение в теорию функций комплексного переменного. Привалов А.А. СПб.: Лань Учебник. 2009.